ISSN 1023-2842
中山管理評論　2011 年六月號
第十九卷第二期　p.279-304

隨機利率模型下，與物價指數連動並具有信用風險之票券的評價與避險

Valuation and Hedge of Inflation-linked Notes with Credit Risk under a Stochastic Interest Rate Model

陳芬英*Fen-Ying Chen
世新大學財務金融學系
Department of Finance,
Shih Hsin University

陳靖 Ching Chen
世新大學財務金融學系
Department of Finance,
Shih Hsin University

摘要

本文提出一個與物價指數連動且具有信用風險的票券，並應用 Cathcart & El-Jahel (1998) 模型中的顯著變數法 (Signaling Variable Method)，在 HJM 模型下，推導該票券合理價格、避險參數和信用價差的封閉解。相較於傳統的抗通膨票券和信用風險模型，本模型具有以下之特色。第一，在 Cathcart & El-Jahel (1998) 模型中，顯著變數 (signaling variable) 與利率之間是彼此獨立 (independent)，而本模型放寬此假設，讓顯著變數與利率彼此相依 (dependent)，使模型更切實際。第二，本模型結合信用風險 (credit risk) 和通

* 通訊作者：陳芬英為世新大學財務金融學系副教授。
作者們由衷感謝編輯委員與二位匿名審查委員提出的寶貴意見，使本文更臻完善，特此致謝。

膨風險 (inflation risk)，在物價持續上揚之際，更能確保投資人期末的實質收益。第三，一般而言，當標的資產的波動度上升，票券的價格會隨之提高，但是本模型，同時存在通膨風險和信用風險，當資產的波動度和物價的波動度越大時，因信用風險溢酬和通膨風險溢酬隨之提高，致使票券之合理價格下降。第四，當物價指數的動態過程為隨機過程 (stochastic process) 時，本模型的標的資產如同浮動面額債券，因此本文之訂價方式，可應用於浮動面額債券之評價。

關鍵詞：通膨風險、信用風險、HJM 模型、信用價差、避險

Abstract

This article expands the work by Cathcart & El-Jahel (1998) to present a new design of inflation-linked defaultable notes. We derive a closed-form solution to the fair price, delta hedge and credit spread under the HJM model. These notes differ from traditional inflation-protected notes and defaultable models for several reasons. First, this model relaxes the assumption of independence of signaling variables and interest rates in the signaling variable approach presented by Cathcart & El-Jahel (1998). This relaxation can actually meet a real world. Second, the model incorporates credit risk and inflation risk, and it can prevent investors' real payoffs at maturity from inflation. Third, in general, the fair price of defaultable notes is higher as volatility of underlying assets increases. Conversely, the fair price in our model is lower when the volatility arises on account of higher credit risk premium and inflation risk premium. Fourth, the pricing procedure of this model can be applied to the valuation of floating-rate bonds.

Keywords: Inflation risk, Credit risk, HJM model, Credit spread, Hedging

壹、前言

由於國際油價不斷攀升，各種原物料成本高居不下，致使物價隨之上揚，

為了讓投資人能規避通貨膨漲的風險，各國政府於是發行物價指數連動債券。早期，英國政府在 1981 年發行 Inflation-linked Gilts (ILGs)；加拿大政府於 1991 年發行 Real Return Bonds (RRBs)。1997 年 1 月，美國政府發行 10 年期抗通膨債券 Treasury Inflation-Protected Securities (TIPS) 共 70.03 億美元[1]，其名目本金隨美國勞工部編制之非季節性調整之都市地區消費者物價指數 (CPI-U) 調整，不但可避免通貨膨漲風險，亦能維持投資人的實質購買力於一定水準，首次認購額便高達 5 倍以上。爾後，智利、澳洲、巴西、義大利、日本、德國等國政府也相繼發行。目前，全球抗通膨債券的發行量已由 1997 年的 1450 億美元，升至 2005 年的 8200 億美元[2]。但是在台灣，政府單位並無發行抗通膨債券，投資人大多購買 REITS 或不動產來防禦通貨膨漲。

對於抵抗通膨之有價證券的研究，Woodward (1990) 與 Brown & Schaefer (1994) 以 CIR 隨機利率模型 (Cox et al., 1985) 評價英國政府發行之 ILGs。Roll (1996) 就債券付息方式、流動性、存續期間與稅賦影響等方面分析四種不同結構的物價指數連動債券模型，並分別以 CIR 模型 (Cox et al., 1985) 評價之。Barr & Campbell (1997) 則利用英國公債與 ILGs 之市場價格估計未來實質利率與通貨膨漲率。Jarrow & Yildirim (2003) 以 HJM 模型 (Heath et al., 1992) 評價 TIPS 以及其衍生性金融商品，並利用債券價格求得名目遠期利率與實質遠期利率。以上之研究，其標的資產為無違約風險的抗通膨債券，而本文所提出的模型，標的資產是具信用風險並與物價指數連動的有價證券 (不一定是債券)，稱為抗通膨票券 (Inflation-Protected Notes；IPS)。該票券在通貨膨漲之際，投資人可同時享有信用風險溢酬和通膨風險溢酬，更能增加投資收益。

然而，對於信用風險評價模型，包括公司價值模型 (Firm Value Model)、違約強度模型 (Intensity Model)，以及介於兩者之間的顯著變數法 (Signaling Approach)。公司價值模型將公司債視為對公司資產的條件賦予求償權 (contingent claim)，公司是否發生信用風險端視其資本結構而決定，又稱為結構式模型 (Structural Model)。Merton (1974) 首先提出信用風險的資產模型，其將股東權益之期末價值視為標的資產是公司資產價值，且履約價格為負債之買權，應用 Black & Scholes (1973) 選擇權訂價公式便可得股東權益之現值，又稱為 BSM 模型。Geske (1977) 延伸 Merton (1974) 模型，因公司常發行附有票息之債券，因此違約可能發生於各個付息日無法履約之時候，所以可將公司債權視為多重請求權之組合，以 Compound Option 來評價公司債權的價值。

[1] 見央行統計報告和美國聯邦銀行統計報告。
[2] 見央行統計報告。

Longstaff & Schwartz (1995) 則應用 Black & Cox (1976) 模型，並加入 Vasicek (1977) 之隨機短期利率模型，使債券之違約風險與利率風險之間具有相關性，研究指出公司價值與利率之間的負相關性可顯著降低具違約風險債券的信用價差。

違約強度模型又稱縮減式模型 (Reduced Form Model)。Jarrow & Turnbull (1995) 首先提出縮減式模型，假設破產過程及無風險利率期間結構彼此獨立，以無套利限制條件評價風險性債券。Jarrow et al. (1997) 則延伸 Jarrow & Turnbull (1995) 模型，首次將信用評等資訊納入有險債券之評價，將信用等級視為時間同質 (time-homogeneous) 的馬可夫鏈 (Markov chain)狀態，且假設回復率為常數。結果發現信用價差期間結構完全吻合市場結構，且信用價差隨信用等級改變。Lando (1998) 則利用 Jarrow et al. (1997) 模型，放寬利率過程與違約過程獨立的假設，使得違約機率受利率波動影響。

Cathcart & El-Jahel (1998) 提出介於結構法與縮減法之間的顯著變數法 (Signaling Variable Method) 評價具有違約風險的債券。該模型延伸 Longstaff & Schwartz (1995)，加入 CIR 隨機短期利率模型 (Cox et al., 1985)，但利率期間結構與顯著變數之間彼此獨立。並假設有一顯著變數 x 能捕捉違約事件的發生，當 x 低於某一下限水準 (x_1) 時債券即違約，進而以偏微分方程 (PDE) 求解。結果發現具違約風險債券的價格為無違約風險債券價格減去信用風險溢酬。Moraux (2004) 依照 Cathcart & El-Jahel (1998) 模型的設定，進而以 Merton (1973) 與 Reiner & Rubinstein (1991) 所提供之障礙選擇權評價方法，推導出風險中立機率測度下之違約機率。

然而，公司價值模型具有理論基礎，但模型估計參數不具一致性；違約強度模型實務上易於應用，但缺乏具經濟意義的理論模型；顯著變數法介於兩者之間，但假設顯著變數與利率之間彼此獨立。本文對於違約模型的評價方式是採用顯著變數法，以抗通膨票券為顯著變數，且放寬 Cathcart & El-Jahel (1998) 模型中顯著變數與利率獨立的假設，推導當利率為隨機且是 HJM 模型時，具違約風險和通膨風險之票券的合理價格和避險參數。

綜合上述之文獻彙整於表 1。與抗通膨之文獻相較，本文的標的資產比其他的抗通膨票券多考慮了信用風險，如此，本模型比其他的抗通膨模型更能適用於具有違約性質的有價證券 (不一定是債券)，而不局限於無風險的政府公債。另外，本模型與其他信用風險之模型相較，除了信用風險的考量外，本文又多加了通貨膨漲風險，而且標的資產、物價指數和遠期利率彼此具有相關性，比 Cathcart & El-Jahel (1998) 的模型更符合實際。況且，在物價上漲之際，本模型比其他信用風險模型更能保障投資人的期末收益。因此，本文的主要貢

獻是將抗通膨模型和信用風險結合，提出同時具有信用風險和通膨風險的有價證券，在隨機利率，HJM 模型下，推導模型在到期日之前違約的封閉解。

本文共分六節，接著是模型的設定和假設。第三節是以平賭過程法 (martingale method) 推導在 HJM 模型下，具通膨風險和信用風險之票券的合理價格。第四節則分析該票券之信用價差和避險。第五節是合理價格、避險參數和信用價差的敏感度分析。最後則是結論。

貳、模型設定和假設

首先，假設市場上有一有價證券 S，而與該資產連動之抗通膨票券 G，其價值為：

$$G_t = S_t I_t \tag{1}$$

其中 I_t 為 t 期之物價指數。該票券於到期日時，投資人除了有價證券的資本利得外，也有通膨溢酬，在高物價時代，其價值會隨物價指數調整，可保障投資人的實質收益。

接著，考慮一個與抗通膨票券連動且具違約風險的有價證券（Defaultable Derivatives on Inflation-protected Securities），簡稱 DDIPS。在到期時，若證券價格或是物價大漲而使得 G_T 價值太高，發行公司違約而無法支付期初約定給付之金額 G_T 時，則投資人於到期日僅能得到某一固定比例（δ）之 G_T，$0 \le \delta \le 1$，此比例即為回復率。當 G_T 越高，則 δ 越低。令 $H(t,G,T)$ 表示到期日 T 之 DDIPS 在 t 期的合理價格，則投資人的到期收益可以 $H(T,G,T)$ 表示如下：

$$H(T,G,T) = \begin{cases} \delta G_T & ,if\ default\ occurs; \\ G_T & ,\ o.w. \end{cases} \tag{2}$$

假設違約時間發生於到期日之前。令一上限水準 B，τ 表示時間 (t,T) 之間任一時點，於到期日前若 G_τ 曾觸及或跨越此界限水準則視為違約，亦即在 DDIPS 存續期間 (t,T) 之內，抗通膨票券的最大值 $\overline{G_T}$ 大於或等於上限水準 B 即產生違約。若 $H(t,G,T)$ 表示到期日前違約模型中 DDIPS 的價格，則其於到期日的收益為：

$$H(T,G,T)=\begin{cases}\delta G_T\ ,\ if\quad \overline{G_T}\geq B\\ G_T\quad ,\ o.w.\end{cases} \tag{3}$$

其中 $\overline{G_T}=Max_{t\leq\tau\leq T}G_\tau$ 。

由 (3)式可以看出到期日收益型態類似於一個上升出局買權的障礙選擇權。同時該模型也可視為公司發行具違約風險之浮動面額零息債券。而此零息債券之面額隨抗通膨票券價格 G_t 調整。若於到期日前 G_τ 一旦觸及界限水準 B ，則該發行公司立即破產並遭清算，而投資人於到期日可獲得 δ 比例之期初約定給付金額 G_T ，$0\leq\delta\leq1$ 。

參、模型之評價

在上節已知 DDIPS 的期末收益，接著將在 HJM 模型下以平賭過程法（martingale method）評價該票券。

假設有價證券（ S_t ）的價格、物價指數（ I_t ）與瞬間遠期利率（ $f(t,T)$ ）的動態過程服從幾何布朗運動（Geometric Brownian Motion），分別為：

$$\begin{cases}\dfrac{dS_t}{S_t}=\mu_S dt+\sigma_S dW_{1t}^P\\ \dfrac{dI_t}{I_t}=\mu_I dt+\sigma_I dW_{2t}^P\\ df(t,T)=\mu_f(t,T)dt+\sigma_f(t,T)dW_{3t}^P\end{cases} \tag{4}$$

其中 μ_S 、 μ_I 、 $\mu_f(t,T)$ 為有價證券價格報酬率、物價指數成長率與瞬間遠期利率之瞬間期望值；σ_S 、σ_I 、$\sigma_f(t,T)$ 為證券價格報酬率、物價指數成長率與瞬間遠期利率之波動度；W_{1t}^P 、W_{2t}^P 、W_{3t}^P 為機率空間 $(\Omega,\Im,P)$ 下單維的布朗運動，彼此互不獨立，$corr\left(dW_{1t}\ ,\ dW_{2t}\right)=\rho_{12}$ ；$corr\left(dW_{1t}\ ,\ dW_{3t}\right)=\rho_{13}$ ；$corr\left(dW_{2t}\ ,\ dW_{3t}\right)=\rho_{23}$ 。P 為原始機率測度。在 HJM 模型 (Heath et al., 1992) 下，面額一元到期日為 T 之零息債券在 t 期價格 $P(t,T)$ 的動態過程由瞬間遠期利率的動態求得如下：

$$\frac{dP(t,T)}{P(t,T)}=[r(t)-m(t,T)+\frac{1}{2}\upsilon^2(t,T)]dt+\upsilon(t,T)dW_{3t}^{P} \tag{5}$$

其中 $m(t,T)=\int_t^T \mu_f(t,u)du$ ； $\upsilon(t,T)=-\int_t^T \sigma_f(t,u)du$ ； $r(t)$ 為 t 期無風險利率。

當利率為隨機時，因 DDIPS 的 t 期價格除以 t 期零息債券價格，在遠期風險中立性機率測度（forward risk neutral probability measure），P_T 下會形成一個平賭過程，因此該違約票券 t 期的合理價格為：

$$H(t,G,T)=P(t,T)\ E^{P_T}\left[\frac{H(T,G,T)}{P(T,T)}\middle|\Im_t\right] \tag{6}$$

將式(4)代入(6)可得 DDIPS 在到期日前違約模型下 t 期的合理價格為

$$H\left(t,G,T\right)=\delta P\left(t,T\right)E_t^{P_T}\left[X_T \mathrm{I}_{\left\{\overline{G_T}\geq B\right\}}\right]+P\left(t,T\right)E_t^{P_T}\left[X_T \mathrm{I}_{\left\{\overline{G_T}<B\right\}}\right] \tag{7}$$

式中 $X_T=\dfrac{G_T}{P(T,T)}$ ； $E_t^{P_T}\left[\square\right]\equiv E^{P_T}\left[\square \mid \Im_t\right]$ ； $\mathrm{I}_{\{\square\}}$ 為指示函數（indicator function）。下列定理一將顯示式(7)的封閉解。

定理一：當證券價格、物價指數與遠期利率動態如式(4)所示，則在 HJM 模型下，到期日前違約模型中與抗通膨票券連動之具違約風險票券 t 期之合理價格為：

$$H(t,G,T)=S_tI_t\left[(\delta-1)\left(N\left(d_2\right)+\left(\frac{S_tI_t}{BP(t,\tau)}\right)^{-1}N\left(d_2-\sigma_X\sqrt{T-t}\right)\right)+1\right] \tag{8}$$

其中 $d_2=\dfrac{\ln\left(\dfrac{S_tI_t}{BP(t,\tau)}\right)+\dfrac{1}{2}\sigma_X^2(T-t)}{\sigma_X\sqrt{T-t}}$ ； τ 為在 DDIPS 存續期間 $\left(t,T\right)$ 之內，抗通膨票券 G 最大值時的時間； $\sigma_X=\left[\sigma_S^2+\sigma_I^2+\upsilon^2(t,T)+2\rho_{12}\sigma_S\sigma_I-2\rho_{13}\sigma_S\upsilon(t,T)-2\rho_{23}\sigma_I\upsilon(t,T)\right]^{\frac{1}{2}}$ 。

定理一的證明詳見附錄 A。

由定理一可知此與物價指數連動並具信用風險之票券的合理價格為無違約風險之票券價格（$S_t\ I_t$）減信用風險溢酬，而此信用風險溢酬由回復率、違約機率與無風險票券價格所組成。

肆、票券之信用價差和避險比例

除了合理價格之外，信用價差和避險比例二因子對投資人而言也是重要的變數。信用價差可用以分析投資人承擔信用風險的成本；避險比例可衡量投資人的避險程度。然而，這兩個因子都需由票券的合理價格推導而來，本章將逐一說明。

一、信用價差

根據定義，信用價差 (credit spread) 為具違約風險商品與無違約風險商品收益率的差異，即：

$$\text{credit spread}=\frac{-\ln\left(\text{defaultable asset price}/\text{default free asset price}\right)}{\text{time to maturity}}$$

根據上述之定義和定理一，我們可求得到期日前違約模型的信用價差(cs)為：

$$cs=\frac{-\ln\left[(\delta-1)\left(N\left(d_2\right)+\left(\frac{S_tI_t}{BP(t,\tau)}\right)^{-1}N\left(d_2-\sigma_X\sqrt{T-t}\right)\right)+1\right]}{T-t} \tag{9}$$

其中 d_1 、 d_2 與 σ_X 定義皆與前節相同。信用價差越大表示當違約票券的違約機率越大時，(9)式的分子就越大，則信用風險溢酬越高，代表投資人需承擔的信用風險成本變高。

二、避險比例

避險比例是指標的資產價格變動時，對衍生性商品價格之影響，又稱為避險參數（ *delta* ）。對發行券商而言，即是發行一單位衍生性商品所需持有標的資產的比例，因此該比例越大，發行券商之避險成本越高。根據定理一，我們將票券的合理價格對標的資產 G 偏微分，得該違約票券的避險參數為：

$$delta=(\delta-1)\left[N(d_2)+\frac{\exp\left(\frac{-d_2^2}{2}\right)}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{2}{\sigma_X\sqrt{T-t}}\right)\right]+1 \qquad (10)$$

式中 d_1 、 d_2 與 σ_X 定義皆與前節相同。

伍、數值分析

由式(8)、(9) 和(10)可知，票券之合理價格、信用價差以及避險比例皆為當期證券價格（S_t）與物價指數（I_t）、障礙水準（B）、回覆率（δ）、零息債券價格(P)、到期期間（$T-t$）以及證券價格、物價指數與瞬間遠期利率的波動度（σ_S 、σ_I 、$\sigma_f(t,T)$）和兩兩間相關係數（ρ_{12} 、ρ_{13} 、ρ_{23}）等 12 個變數的函數。因此我們接著討論這些變數對違約票券之合理價格、信用價差以及避險比例的敏感度分析。

然而，當期的證券價格、當期的物價指數與當期的零息債券價格可由市場上直接觀察，因此我們可假設他們是固定參數。而其他 8 個重要變數，即障礙水準、回覆率、證券價格、物價指數與瞬間遠期利率的波動度和相關係數，本節將以比較靜態分析探討違約票券之合理價格、信用價差以及避險比例受此 8 個變數之影響程度。

在進行比較靜態分析之前，首先假設模型中之零息債券價格滿足下列條件：(1) $0\le P(t,T)\le 1$；(2) 零息債券價格隨到期期間越長而遞減。此外，遠期利率的波動度 $\sigma_f(t,T)$ 設為一固定常數 σ_f ，故 $\upsilon(t,T)=-\sigma_f(T-t)$ 。而其他相關變數的設定需符合模型之設定。在式(4)中，標的資產報酬率、物價指數成長率皆服從常態分配，所以標的資產和物價指數為 lognormal 分配，即標的資產和物價指數為正實數。其次，標準差、回復率也需正數；相關係數則介於-1 到 1 之間。由式(3)可知 障礙水準是抗通膨票券從 t 至到期日期間的上限，即 $\overline{G_T}=Max_{t\le\tau\le T}G_\tau\ge B$ 。因此模型的參數假設如下：

$S_t=10$, $I_t=100$, $B=2000$, $\delta=0.5$, $\sigma_S=0.4$, $\sigma_I=0.1$,$\sigma_f=0.15$, $\rho_{12}=0.7$, $\rho_{23}=0.5$, $\rho_{13}=-0.5$。

一、合理價格之敏感度分析

根據定理一，圖 1 至圖 8 為具通膨風險與信用風險之票券的合理價格敏感度。可知，證券價格、物價指數以及遠期利率的波動度越大，此可違約票券的價格越低，其原因為波動度越大則到期時或到期前標的資產價格跨越上限水準 B 的機會越大，即違約機率越高，因此信用風險溢酬越高；短期間證券價格與物價指數的波動度影響較大，而到期期間較長時則是遠期利率的波動度影響較大，其原因為到期期限越長，無風險零息債券價格受遠期利率波動度的影響越大，波動度越高則零息債券價格越低，使得 d_1 、 d_2 越大。而證券價格、物價指數以及遠期利率兩兩之間的相關係數為正相關將使得此可違約票券價格降低，原因為同向變動使到期時違約的機率越高。障礙水準越高則違約機率越小，回復率越大則到期時的期望收益越高，因此價格越高。

二、信用價差之敏感度分析

根據式(9)，圖 9 至 16 為具通膨風險與信用風險之票券其信用價差的敏感度。

可知，波動度越大其信用價差越高，原因為違約風險越高。到期期間短時證券價格與物價指數波動度影響程度十分劇烈，到期期間較長時則遠期利率波動度影響越大。此外，資產間負的相關性可降低信用價差，所以當負的相關性越大則信用風險溢酬越低，在 Longstaff & Schwartz (1995) 的模型中也有此現象。最後，回復率越高則期末預期收益越高，障礙水準越高則違約機率越低，皆可降低其信用價差。

三、避險比例之敏感度分析

根據式(10)，圖 17 至 24 為到期日前違約模型下，具通膨風險與信用風險之票券其避險比例的敏感度分析。距到期期間短時 (約 1-2 年)，證券價格以及物價指數的波動度越高，避險比例越低，遠期利率的波動度於此階段影響不明顯，而資產間的正相關性於此階段會使得避險比例降低；然而一旦跨越此一階段，在到期期間較長時，變數變化產生相反方向的影響，證券價格、物價指數及遠期利率的波動度越高，避險比例越高，資產間的正相關性則會使得避險比例增加。

綜合圖 1 至 24，彙整如表 2。由表 2 可知，模型參數對合理價格的影響是呈同向變動，但與信用價差呈反向變動，而與避險比例的影響方向並不一定。

陸、結論

當金融海嘯在全世界吹起，金融機構相繼倒閉，從美林證券、雷曼兄弟，一直到法國巴黎銀行，英國倫敦銀行，乃至台灣的慶豐銀行被接管，全球金融壟罩在一股低氣壓中。然而為解救這場金融災害，世界各國不斷實施寬鬆貨幣政策之際，令投資人擔心的是信用風險和通貨膨漲的壓力。因此，本文應用 Cathcart & El-Jahel (1998) 模型中的顯著變數法，但在顯著變數與利率之間存在相關性，且利率為隨機的情形下，提出一個同時具通膨風險和信用風險的票券，以保障投資人的期末實質收益。

相較於傳統的抗通膨票券和信用風險模型，本模型具有以下之特色。第一，在 Cathcart & El-Jahel (1998) 模型中，顯著變數與利率之間是彼此獨立，而本模型放寬此假設，讓顯著變數與利率彼此依賴，使模型更切實際。第二，該模型結合信用風險和通膨風險，在物價持續上揚之際，更能確保投資人期末的實質收益。第三，一般而言，當標的資產波動度越大時，一般而言票券的合理價格應該會越高。但是本模型同時存在通膨風險和信用風險，在標的資產波動度提升時，信用風險溢酬與通膨風險溢酬[3]亦隨之提升，使得票券的合理價格下降，投資人支付的價格更低廉。第四，當物價指數的動態過程為隨機過程 (stochastic process)時，本模型的標的資產便類似浮動面額債券，而本模型之訂價方式，即能應用於浮動面額債券之評價。

表 1　相關文獻整理

文獻	標的資產	評價模型	信用風險	通貨膨漲風險
Merton (1974)	公司資產	結構式模型	有	無
Geske (1977)	公司債	結構式模型	有	無
Woodward (1990)	ILG (英國政府公債)	CIR 利率模型	無	有
Brown & Schaefer (1994)	ILG (英國政府公債)	CIR 利率模型	無	有
Longstaff & Schwartz (1995)	公司債	Vasicek 利率模型和結構式模型	有	無
Jarrow & Turnbull (1995)	公司債	縮減式模型	有	無
Roll (1996)	物價指數連動債券	CIR 利率模型	無	有
Barr & Campbell (1997)	ILG (英國政府公債)	實証研究	無	有

[3]通膨風險溢酬 (常以 volatility of inflation index 表示) 是投資人在承受通膨風險時所得到的補償（premium）。當物價指數波動提高而合理價格卻下降之現象，稱通膨風險溢酬（inflation premium）。

Jarrow et al. (1997)	公司債	縮減式模型和信用評等模型	有	無
Cathcart & El-Jahel (1998)	公司債	顯著變數法和 CIR 利率模型	有	無
Jarrow & Yildirim (2003)	TIPS(美國政府公債)	HJM 利率模型	無	有
Moraux (2004)	公司債	顯著變數法	有	無
本文	物價指數連動的有價證券	顯著變數法和 HJM 利率模型	有	有

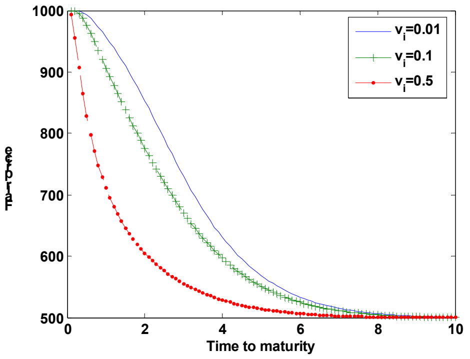


圖 1 物價指數波動度對票券合理價格的敏感度

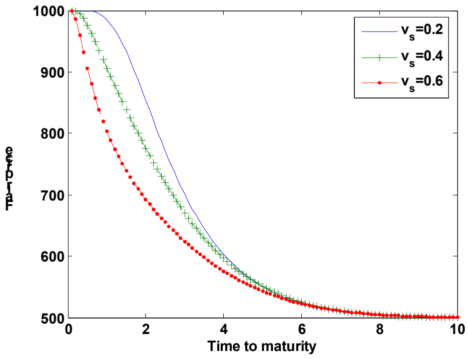


圖 2 證券價格波動度對票券合理價格的敏感度

說明：除到期期間與欲分析之參數外，其餘參數皆設定如下：
$S_t=10, I_t=100, B=2000, \delta=0.5, \sigma_S=0.4, \sigma_I=0.1, \sigma_f=0.15$, $\rho_{12}=0.7, \rho_{23}=0.5$, $\rho_{13}=-0.5$。圖中，v_s, v_i 分別為 σ_S，σ_I。

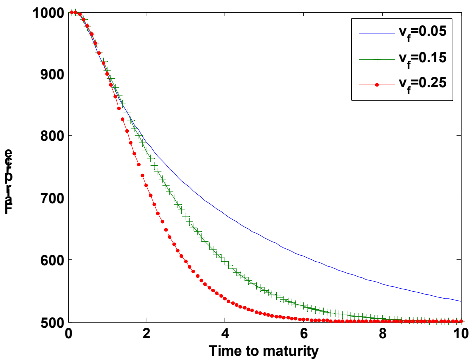


圖 3 遠期利率波動度對票券合理價格的敏感度

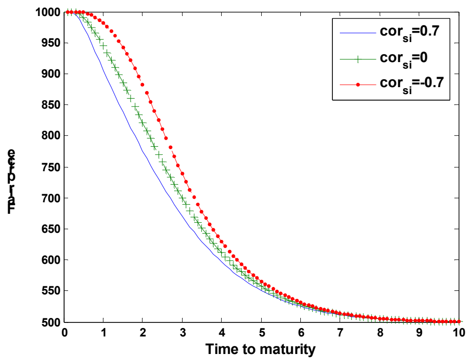


圖 4 證券價格與物價的相關係數對票券合理價格的敏感度

說明：除到期期間與欲分析之參數外，其餘參數皆設定如下：
$S_t=10, I_t=100, B=2000, \delta=0.5, \sigma_S=0.4, \sigma_I=0.1, \sigma_f=0.15, \rho_{12}=0.7, \rho_{23}=0.5,$
$\rho_{13}=-0.5$。圖中，v_f 為 σ_f；cor_{si} 為 ρ_{12}。

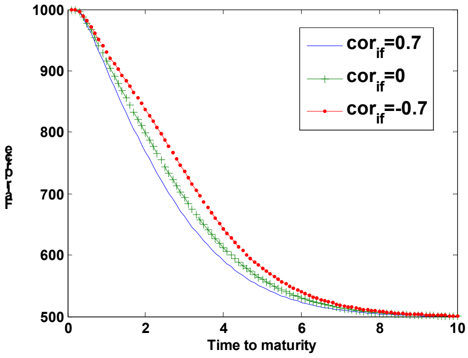


圖 5 遠期利率與物價的相關係數對票券合理價格的敏感度

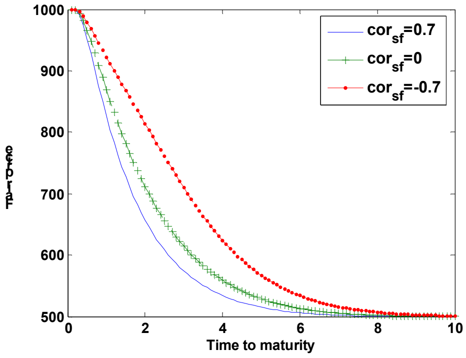


圖 6 遠期利率與證券價格的相關係數對票券合理價格的敏感度

說明：除到期期間與欲分析之參數外，其餘參數皆設定如下：
$S_t=10, I_t=100, B=2000, \delta=0.5, \sigma_S=0.4, \sigma_I=0.1, \sigma_f=0.15, \rho_{12}=0.7, \rho_{23}=0.5,$
$\rho_{13}=-0.5$。圖中，cor_{if} 為 ρ_{23}，cor_{sf} 為 ρ_{13}。

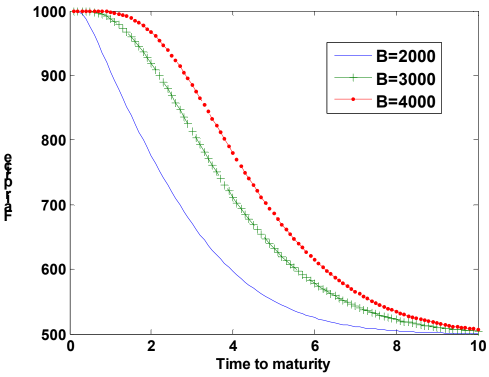


圖 7 障礙水準對票券合理價格的敏感度

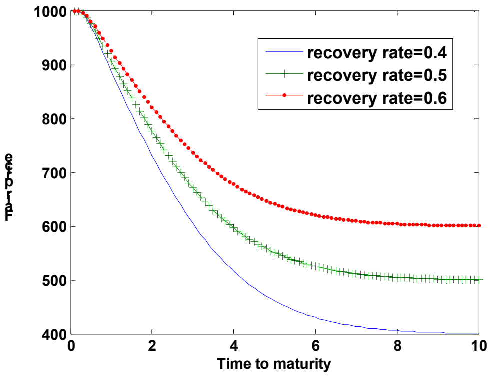


圖 8 回復率對票券合理價格的敏感度

說明：除到期期間與欲分析之參數外，其餘參數皆設定如下：
$S_t=10, I_t=100, B=2000, \delta=0.5, \sigma_S=0.4, \sigma_I=0.1, \sigma_f=0.15, \rho_{12}=0.7, \rho_{23}=0.5,$
$\rho_{13}=-0.5$。圖中 recovery rate 為 δ。

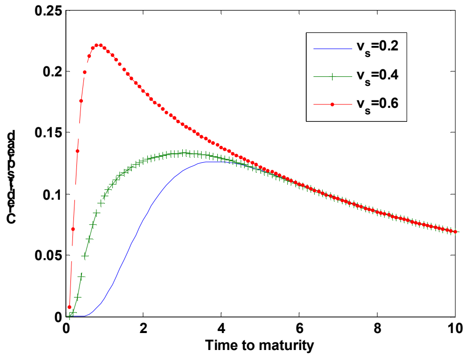


圖 9 證券價格波動度對信用價差的敏感度

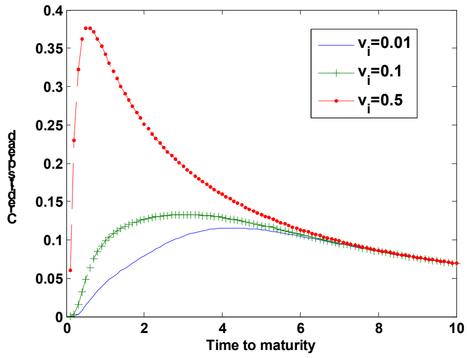


圖 10 物價指數波動度對信用價差的敏感度

說明：除到期期間與欲分析之參數外，其餘參數皆設定如下：

$S_t=10, I_t=100, B=2000, \delta=0.5, \sigma_S=0.4, \sigma_I=0.1, \sigma_f=0.15, \rho_{12}=0.7, \rho_{23}=0.5,$

$\rho_{13}=-0.5$。圖中，v_s, v_i 分別為 σ_S, σ_I。

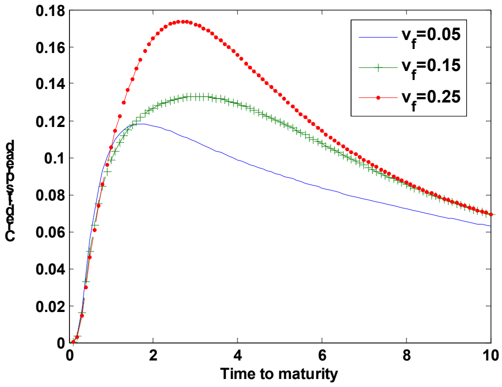


圖 11 遠期利率波動度對信用價差的敏感度

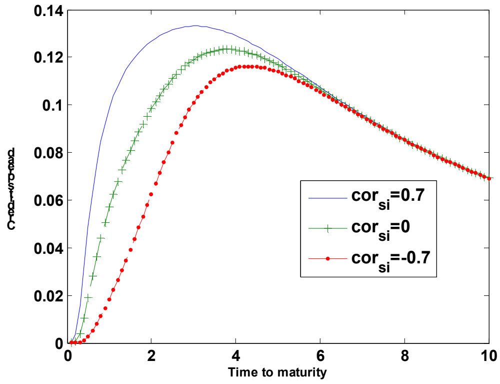


圖 12 證券價格與物價的相關係數對信用價差的敏感度

說明：除到期期間與欲分析之參數外，其餘參數皆設定如下：

$S_t=10, I_t=100, B=2000, \delta=0.5, \sigma_S=0.4, \sigma_I=0.1, \sigma_f=0.15, \rho_{12}=0.7, \rho_{23}=0.5,$

$\rho_{13}=-0.5$。圖中，v_f 為 σ_f，cor_{si} 為 ρ_{12}。

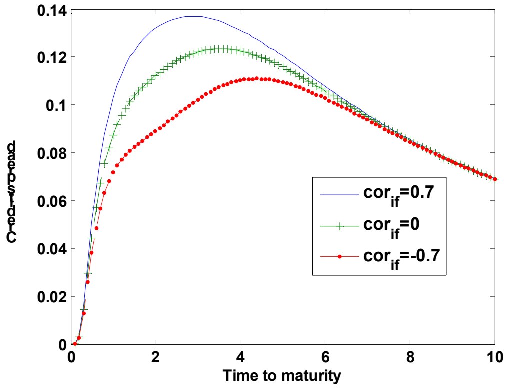


圖 13 遠期利率與物價的相關係數對信用價差的敏感度

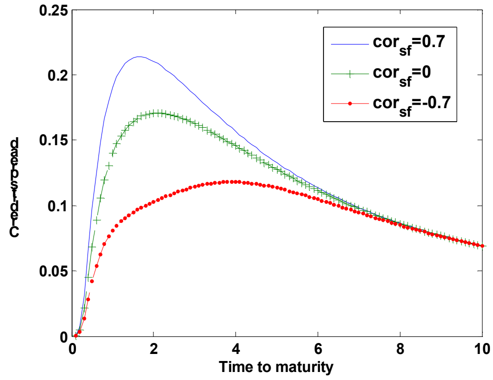


圖 14 遠期利率與證券價格的相關係數對信用價差的敏感度

說明：除到期期間與欲分析之參數外，其餘參數皆設定如下：

$S_t = 10, I_t = 100, B = 2000, \delta = 0.5, \sigma_S = 0.4, \sigma_I = 0.1, \sigma_f = 0.15$, $\rho_{12} = 0.7, \rho_{23} = 0.5$, $\rho_{13} = -0.5$ 。圖中， cor_{if} 為 ρ_{23} ， cor_{sf} 為 ρ_{13} 。

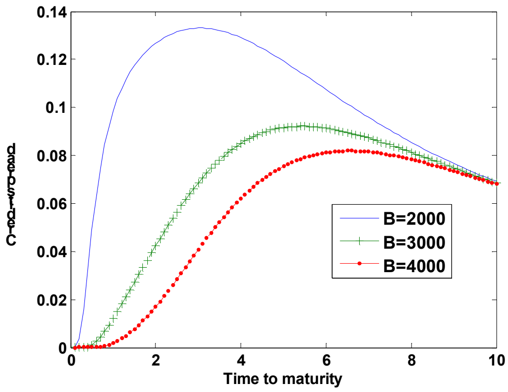


圖 15 障礙水準對信用價差的敏感度

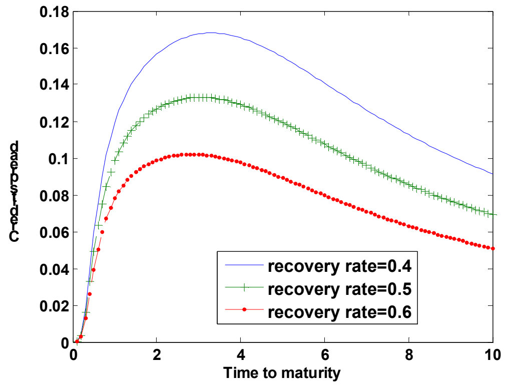
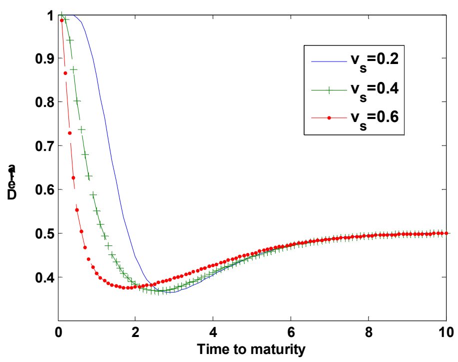


圖 16 回復率對信用價差的敏感度

說明：除到期期間與欲分析之參數外，其餘參數皆設定如下：

$S_t = 10, I_t = 100, B = 2000, \delta = 0.5, \sigma_S = 0.4, \sigma_I = 0.1, \sigma_f = 0.15$, $\rho_{12} = 0.7, \rho_{23} = 0.5$, $\rho_{13} = -0.5$ 。圖中， recovery rate 為 δ 。



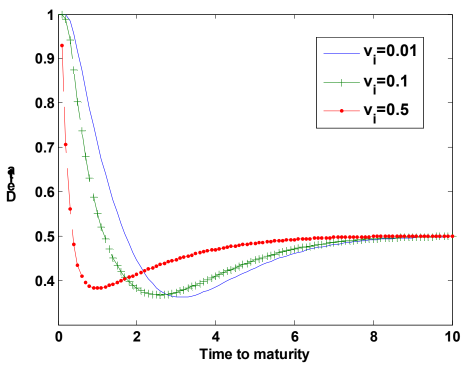
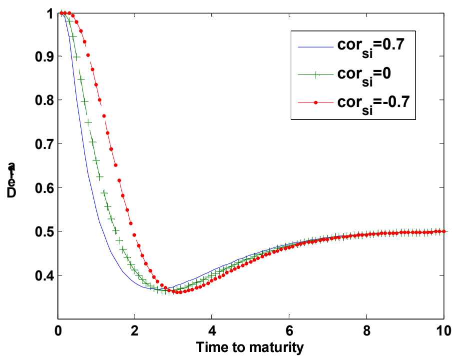


圖 17 證券價格波動度對避險比例的敏感度

圖 18 物價波動度對避險比例的敏感度

說明：除到期期間與欲分析之參數外，其餘參數皆設定如下：

$S_t=10, I_t=100, B=2000, \delta=0.5, \sigma_S=0.4, \sigma_I=0.1, \sigma_f=0.15$, $\rho_{12}=0.7, \rho_{23}=0.5$, $\rho_{13}=-0.5$。圖中，v_s，v_i 分別為 σ_S，σ_I。



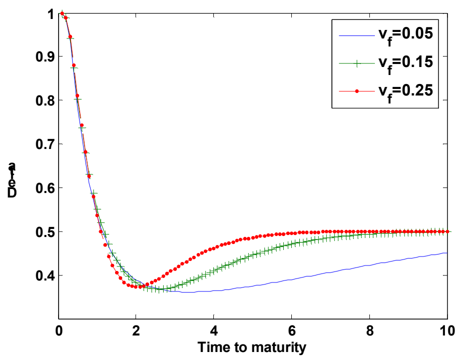


圖 19 遠期利率波動度對避險比例的敏感度

圖 20 證券價格與物價的相關係數對避險比例的敏感度

說明：除到期期間與欲分析之參數外，其餘參數皆設定如下：

$S_t=10, I_t=100, B=2000, \delta=0.5, \sigma_S=0.4, \sigma_I=0.1, \sigma_f=0.15$, $\rho_{12}=0.7, \rho_{23}=0.5$, $\rho_{13}=-0.5$。圖中，v_f 分別為 σ_f，cor_{si} 為 ρ_{12}。

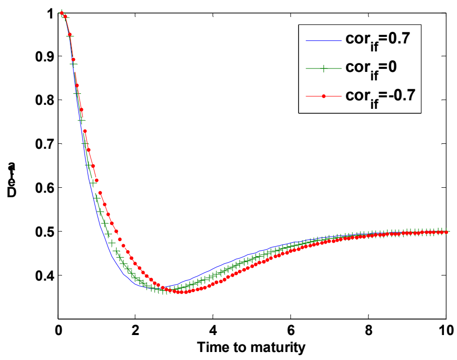


圖 21 遠期利率與物價的相關係數對避險比例的敏感度

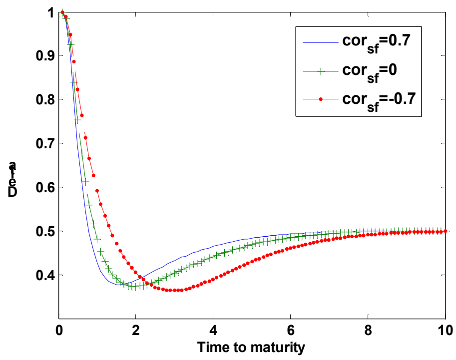


圖 22 遠期利率與證券價格係數對避險比例的敏感度

說明：除到期期間與欲分析之參數外，其餘參數皆設定如下：

$S_t = 10, I_t = 100, B = 2000, \delta = 0.5, \sigma_S = 0.4, \sigma_I = 0.1, \sigma_f = 0.15, \rho_{12} = 0.7, \rho_{23} = 0.5,$ $\rho_{13} = -0.5$。圖中，cor_{if} 為 ρ_{23}，cor_{sf} 為 ρ_{13}。

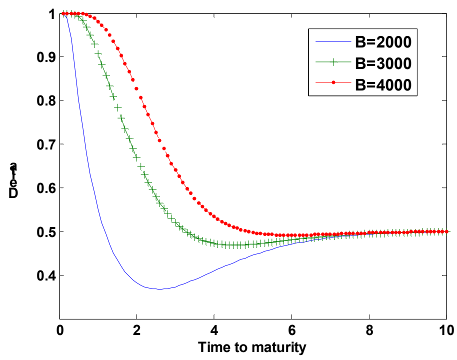


圖 23 障礙水準對避險比例的敏感度

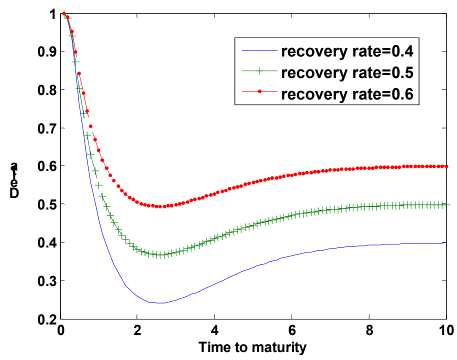


圖 24 回復率對避險比例的敏感度

說明：除到期期間與欲分析之參數外，其餘參數皆設定如下：

$S_t = 10, I_t = 100, B = 2000, \delta = 0.5, \sigma_S = 0.4, \sigma_I = 0.1, \sigma_f = 0.15, \rho_{12} = 0.7, \rho_{23} = 0.5,$ $\rho_{13} = -0.5$。圖中， recovery rate 為 δ。

表 2 敏感度分析之彙整

	合理價格	信用價差	避險比例
有價證券價格波動度(σ_S)	負	正	先負後正
物價指數波動度(σ_I)	負	正	先負後正
遠期利率波動度(σ_f)	負	先負後正	先負後正
有價證券與物價指數相關係數(ρ_{12})	負	正	先負後正
物價指數與遠期利率相關系數(ρ_{23})	負	正	先負後正
有價證券與遠期利率相關系數(ρ_{13})	負	正	先負後正
障礙水準(B)	正	負	正
回復率(δ)	正	負	正

說明：正、負分別表示同向變動和反向變動。

參考文獻

Barr, D. G. and Campbell, J. Y., 1997, “Inflation, Real Interest Rates, and the Bond Market: A Study of UK Nominal and Index-Linked Government Bond Prices,” **Journal of Monetary Economics**, Vol. 39, No. 3, 361-383.

Black, F. and Cox, J. C., 1976, “Valuing Corporate Securities: Some Effects of Bond Indenture Provisions,” **Journal of Finance**, Vol. 31, No. 2, 351-367.

Black, F. and Scholes, M., 1973, “The Pricing of Options and Corporate Liabilities,” **Journal of Political Economy**, Vol. 81, No. 3, 637-654.

Brown, R. and Schaefer, S., 1994, “The Term Structure of Real Interest Rates and the Cox, Ingersoll, and Ross Model,” **Journal of Financial Economics**, Vol. 35, No. 1, 3-42.

Cathcart, L. and El-Jahel, L., 1998, “Valuation of Defaultable Bonds,” **Journal of Fixed Income**, Vol. 8, No. 1, 65-78.

Cox, J. C., Ingersoll, J. E., and Ross, S. A., 1985, “A Theory of the Term Structure of Interest Rates,” **Econometrica**, Vol. 53, No. 2, 385-407.

Geske, R., 1977, “The Valuation of Corporate Liabilities as Compound Options,” **Journal of Financial and Quantitative Analysis**, Vol. 12, No. 4, 541-552.

Heath, D., Jarrow, R. A., and Morton, A., 1992, “Bond Pricing and the Term Structure of

Interest Rates: A New Methodology for Contingent Claim Valuation," **Econometrica**, Vol. 60, No. 1, 77-105.

Ingersoll, J. E., 1987, **Theory of Financial Decision Making**, Lanham, MD: Rowmam & Littlefield.

Jarrow, R. and Turnbull, S., 1995, "Pricing Derivatives on Financial Securities Subject to Credit Risk," **Journal of Finance**, Vol. 50, No. 1, 53-85.

Jarrow, R. and Yildirim, Y., 2003, "Pricing Treasury Inflation Protected Securities and Related Derivatives Using an HJM Model," **Journal of Financial and Quantitative Analysis**, Vol. 38, No. 2, 337-358.

Jarrow, R., Lando, D., and Turnbull, S., 1997, "A Markov Model for the Term Structure of Credit Risk Spread," **The Review of Financial Studies**, Vol. 10, No. 2, 481-523.

Lando, D., 1998, "On Cox Process and Credit Risky Securities," **Review of Derivatives**, Vol. 2, No. 2-3, 99-120.

Longstaff, F. and Schwartz, E., 1995, "A Simple Approach to Valuing Risky Fixed and Floating Rate Debt," **Journal of Finance**, Vol. 50, No. 3, 789-819.

Merton, R. C., 1973, "Theory of Rational Option Pricing," **Bell Journal of Economics and Management Science**, Vol. 4, No. 1, 141-183.

Merton, R. C., 1974, "On the Pricing of Corporate Debt: The Risk Structure of Interest Rates," **Journal of Finance**, Vol. 29, No. 2, 449-470.

Moraux, F., 2004, "A Closed Form Solution for Pricing Defaultable Bonds," **Finance Research Letters**, Vol. 1, No. 2, 135-142.

Reiner, E. and Rubinstein, M., 1991, "Breaking Down the Barriers," **Risk**, Vol. 4, No. 8, 28-35.

Roll, R., 1996, "U.S. Treasury Inflation-Indexed Bonds: The Design of a New Security," **Journal of Fixed Income**, Vol. 6, No. 3, 9-28.

Vasicek, O., 1977, "An Equilibrum Characterization of the Term Structure," **Journal of Financial Economics**, Vol. 5, No. 2, 177-188.

Woodward, T., 1990, "The Real Thing: A Dynamic Profile of The Term Structure of Real Interest Rates and Inflation Expectations in the United Kingdom," **Journal of Business**, Vol. 63, No. 3, 373-398.

附錄

附錄 A：定理一之證明

由(1)式利用伊藤定理（Itô Lemma）展開可得原始機率測度下 G_t 之動態為：

$$\frac{dG_t}{G_t}=(\mu_S+\mu_I+\rho_{12}\sigma_S\sigma_I)dt+\sigma_S dW_{1t}^P+\sigma_I dW_{2t}^P \tag{A1}$$

利用常態分配相加仍為常態分配的性質，令 dW_{4t}^P 為一標準 Wiener process，則：

$$\sigma_S dW_{1t}^P+\sigma_I dW_{2t}^P=(\sigma_S^2+\sigma_I^2+2\rho_{12}\sigma_S\sigma_I)^{\frac{1}{2}}dW_{4t}^P$$

$$\frac{dG_t}{G_t}=(\mu_S+\mu_I+\rho_{12}\sigma_S\sigma_I)dt+\sigma_G dW_{4t}^P$$

其中　$\sigma_G=(\sigma_S^2+\sigma_I^2+2\rho_{12}\sigma_S\sigma_I)^{\frac{1}{2}}$

σ_G 即為抗通膨票券 G_t 之波動度。由於股票與抗通膨票券皆為在市面上流通之有價證券，皆為價值過程，故在風險中立性機率測度（Q-measure）下其動態分別為：

$$\frac{dS_t}{S_t}=rdt+\sigma_S dW_{1t}^Q$$

$$\frac{dG_t}{G_t}=rdt+\sigma_G dW_{4t}^Q$$

其中 r 為固定之無風險利率。接著利用上兩式以及 Girsanov's Theorem 求解風險中立性機率測度下物價指數之動態過程，令：

$$dW_{1t}^P=dW_{1t}^Q+\xi_{1t}dt$$

則風險中立性機率測度下物價指數之動態過程與抗通膨票券之動態可改寫

為：$\frac{dI_t}{I_t}=(\mu_I+\sigma_I\xi_{1t})dt+\sigma_I dW_{1t}^Q$

$$\frac{dG_t}{G_t}=(r+\mu_I+\sigma_I\xi_{1t}+\rho_{12}\sigma_S\sigma_I)dt+\sigma_G dW_{4t}^Q \qquad \text{(A2)}$$

比較式(A1)與(A2)可得：

$$\xi_{1t}=-\frac{\mu_I+\rho_{12}\sigma_S\sigma_I}{\sigma_I}$$

因此風險中立性機率測度下物價指數之動態過程為：

$$\frac{dI_t}{I_t}=-\rho_{12}\sigma_S\sigma_I dt+\sigma_I dW_{1t}^Q$$

由於零息債券價格同樣為一價值過程，在風險中立性機率測度下其期望報酬為無風險利率，因此風險中立性機率測度下之動態為：

$$\frac{dP(t,T)}{P(t,T)}=rdt+\upsilon(t,T)dW_{3t}^Q$$

由於抗通膨票券為價值過程，在隨機利率架構下，以零息債券價格做為基準財（numeraire）平準後，在遠期機率測度 P_T 下為 Martingale，即：

$$\frac{G_t}{P(t,T)}=E^{P_T}\left[\frac{G_T}{P(T,T)}\middle|\Im_t\right]$$

因此，建立一新資產（ X_t ），為抗通膨票券以零息債券平準之價格：

$$X_t=\frac{G_t}{P(t,T)}=\frac{S_t I_t}{P(t,T)}$$

利用伊藤定理展開可得風險中立性機率測度下 X_t 之動態為：

$$\frac{dX_t}{X_t}=\left[-\rho_{13}\sigma_S\upsilon(t,T)-\rho_{23}\sigma_I\upsilon(t,T)+\frac{1}{2}\upsilon^2(t,T)\right]dt+\sigma_S dW_{1t}^Q+\sigma_I dW_{2t}^Q-\upsilon(t,T)dW_{3t}^Q$$

同樣利用常態分配相加為常態分配的性質，令 dW_{5t}^{Q} 為一標準 Wiener process，則：

$$\sigma_S dW_{1t}^{Q} + \sigma_I dW_{2t}^{Q} - \upsilon(t,T) dW_{3t}^{Q} = \sigma_X dW_{5t}^{Q}$$

其中

$$\sigma_X = \left[\sigma_S^2 + \sigma_I^2 + \upsilon^2(t,T) + 2\rho_{12}\sigma_S\sigma_I - 2\rho_{13}\sigma_S\upsilon(t,T) - 2\rho_{23}\sigma_I\upsilon(t,T)\right]^{\frac{1}{2}} \quad \text{(A3)}$$

則風險中立性機率測度下 X_t 之動態為：

$$\frac{dX_t}{X_t} = \left[-\rho_{13}\sigma_S\upsilon(t,T) - \rho_{23}\sigma_I\upsilon(t,T) + \frac{1}{2}\upsilon^2(t,T)\right]dt + \sigma_X dW_{5t}^{Q} \quad \text{(A4)}$$

再由 Girsanov's Theorem 將 Q-measure 轉換為 P_T -measure，令：

$$dW_{5t}^{Q} = dW_{5t}^{P_T} + \xi_{5t} dt \quad \text{(A5)}$$

由於 X_t 在 P_T -measure 下為 Martingale，因此

$$E^{P_T}\left[\frac{dX_t}{X_t}\right] = 0$$

將(A4)式與(A5)式代入，即可得：

$$\xi_{5t} = \frac{\rho_{13}\sigma_S\upsilon(t,T) + \rho_{23}\sigma_I\upsilon(t,T) - \frac{1}{2}\upsilon^2(t,T)}{\sigma_X}$$

$$\frac{dX_t}{X_t} = \sigma_X dW_{5t}^{P_T} \quad \text{(A6)}$$

$$X_T = X_t \exp\left[-\frac{1}{2}\sigma_X^2(T-t) + \sigma_X W_{5,T-t}^{P_T}\right] \quad \text{(A7)}$$

具違約風險之抗通膨票券以零息債券價格做為基準財平準後，在遠期風險中立性機率測度下為 Martingale，即：

$$
\begin{aligned}
\frac{H(t,G,T)}{P(t,T)} &= E^{P_T}\left[\frac{H(T,G,T)}{P(T,T)}\middle|\Im_t\right] \\
&= \delta X_t E^{P_T}\left[e^{-\frac{1}{2}\sigma_X^2(T-t)+\sigma_X W_{5,T-t}^{P_T}} \mathrm{I}_{\{\overline{G_T}\ge B\}}\middle|\Im_t\right] + X_t E^{P_T}\left[e^{-\frac{1}{2}\sigma_X^2(T-t)+\sigma_X W_{5,T-t}^{P_T}} \mathrm{I}_{\{\overline{G_T}<B\}}\middle|\Im_t\right] \\
&= \delta X_t \Pr^{P_T}(\overline{G_T}\ge B) + X_t\left[1-\Pr^{P_T}(\overline{G_T}\ge B)\right] \\
&= \frac{S_t I_t}{P(t,T)}\left[(\delta-1)\Pr^{P_T}(\overline{G_T}\ge B)+1\right]
\end{aligned}
$$

故

$$
H(t,G,T) = S_t I_t\left[(\delta-1)\Pr^{P_T}(\overline{G_T}\ge B)+1\right] \tag{A8}
$$

欲求解(A8)式內的機率必須利用幾何布朗運動極大值機率分配。Ingersoll（1987）推導此分配如下，假設股價動態為：

$$
d\ln S_t = (r_f - \frac{1}{2}\sigma_S^2)dt + \sigma_S dW_{1t}^Q
$$

令 $Y_T = \ln(S_T/S_t)$ ，$\overline{S_T} = Max_{t\le u\le T} S_u$ ，$M_{Y,T} = Max_{t\le u\le T} Y_u = \ln(\overline{S_T}/S_t)$ 則：

$$
\begin{aligned}
&\Pr^Q\left[S_T < K\text{ , }\overline{S_T} < B\right] \\
&= \Pr^Q\left[Y_T < \ln(\frac{K}{S_t})\text{ , }M_{Y,T} < \ln(\frac{B}{S_t})\right] \\
&= N\left(\frac{\ln(\frac{K}{S_t}) - (r_f - \frac{\sigma_S^2}{2})(T-t)}{\sigma_S\sqrt{T-t}}\right) - (\frac{B}{S_t})e^{\frac{2r_f}{\sigma_S^2}-1} N\left(\frac{\ln(\frac{K}{S_t}) - 2\ln(\frac{B}{S_t}) - \left(r_f - \sigma_S^2/2\right)(T-t)}{\sigma_S\sqrt{T-t}}\right)
\end{aligned}
$$

(A9)

因此，

$$\Pr^{P_T}(\overline{G_T} \geq B) = 1 - \Pr^{P_T}(Max\left\{G_{t_0}, G_{t_1}, ..., G_{t_n}\right\} < B)$$
$$= 1 - \Pr^{P_T}(Max\left\{\frac{G_{t_0}}{P(t_0,t_0)}, \frac{G_{t_1}}{P(t_1,t_1)}, ..., \frac{G_{t_n}}{P(t_n,t_n)}\right\} < B)$$
$$= 1 - \Pr^{P_T}(Max_{t \leq \tau \leq T} \frac{G_\tau}{P(\tau,\tau)} < B)$$

又

$$\frac{G_\tau}{P(\tau,\tau)} = X_\tau = X_t \exp\left[\frac{1}{2}\sigma_X^2(\tau - t) + \sigma_X W_{5,\tau-t}^{P_T}\right] = \frac{G_t}{P(t,\tau)} \exp\left[\frac{1}{2}\sigma_X^2(\tau - t) + \sigma_X W_{5,\tau-t}^{P_T}\right]$$

所以

$$\Pr^{P_T}(\overline{G_T} \geq B) = 1 - \Pr^{P_T}\left(Max_{t \leq \tau \leq T} \frac{G_\tau}{P(\tau,\tau)} < B\right)$$
$$= 1 - \Pr^{P_T}\left(Max_{t \leq \tau \leq T}\left[\frac{1}{2}\sigma_X^2(\tau - t) + \sigma_X W_{5,\tau-t}^{P_T}\right] < \ln\left(\frac{BP(t,\tau)}{G_t}\right)\right)$$

令 $Y_\tau = \frac{1}{2}\sigma_X^2(\tau - t) + \sigma_X W_{5,\tau-t}^{P_T}$ ， $M_{Y,T} = Max_{t \leq u \leq T} Y_u$ ，則

$$\Pr^{P_T}(\overline{G_T} \geq B) = 1 - \Pr^{P_T}\left(Max_{t \leq \tau \leq T}\left[\frac{1}{2}\sigma_X^2(\tau - t) + \sigma_X W_{5,\tau-t}^{P_T}\right] < \ln\left(\frac{BP(t,\tau)}{G_t}\right)\right)$$
$$= 1 - \Pr^{P_T}\left(M_{Y,T} < \ln\left(\frac{BP(t,\tau)}{G_t}\right)\right)$$
$$= 1 - \Pr^{P_T}\left(Y_T < \ln\left(\frac{BP(t,\tau)}{G_t}\right) \ , \ M_{Y,T} < \ln\left(\frac{BP(t,\tau)}{G_t}\right)\right)$$
$$= N\left(\frac{\ln\left(\frac{S_t I_t}{BP(t,\tau)}\right) + \frac{1}{2}\sigma_X^2(T-t)}{\sigma_X\sqrt{T-t}}\right) + \left(\frac{S_t I_t}{BP(t,\tau)}\right)^{-1} N\left(\frac{\ln\left(\frac{S_t I_t}{BP(t,\tau)}\right) - \frac{1}{2}\sigma_X^2(T-t)}{\sigma_X\sqrt{T-t}}\right)$$
$$= N\left(d_2\right) + \left(\frac{S_t I_t}{BP(t,\tau)}\right)^{-1} N\left(d_2 - \sigma_X\sqrt{T-t}\right)$$

(A10)

其中

$$d_2 = \frac{\ln\left(\dfrac{S_t I_t}{BP(t,\tau)}\right) + \dfrac{1}{2}\sigma_X^2 (T-t)}{\sigma_X \sqrt{T-t}}$$

最後，違約票券合理價格之封閉解如下：

$$H(t,G,T) = S_t I_t \left[(\delta - 1)\left(N\left(d_2\right) + \left(\frac{S_t I_t}{BP(t,\tau)}\right)^{-1} N\left(d_2 - \sigma_X \sqrt{T-t}\right)\right) + 1 \right] \quad \text{(A11)}$$

其中

$$d_2 = \frac{\ln\left(\dfrac{S_t I_t}{BP(t,\tau)}\right) + \dfrac{1}{2}\sigma_X^2 (T-t)}{\sigma_X \sqrt{T-t}} \text{；} t \le \tau \le T \text{；}$$

$$\sigma_X = \left[\sigma_S^2 + \sigma_I^2 + \upsilon^2(t,T) + 2\rho_{12}\sigma_S\sigma_I - 2\rho_{13}\sigma_S\upsilon(t,T) - 2\rho_{23}\sigma_I\upsilon(t,T)\right]^{\frac{1}{2}} \text{；}$$

$$\upsilon(t,T) = -\int_t^T \sigma_f(t,u)du$$

作者簡介

陳芬英

於 2005 年取得政治大學金融博士，目前為世新大學財務金融學系副教授。研究領域為財務工程學、利率模型和固定收益証券分析。主要教授固定收益証券分析、期貨選擇權、債券與利率分析和國際財務管理。學術論文曾發表於 Economic Modelling (SSCI)，The Journal of Risk Model Validation (SSCI)，Journal of Probability and Statistics (Current index to Statistics)，Journal of Risk Finance (FLI)，Applied Mathematics and Computation (SCI)，International Journal of Innovative Computing, Information and Control (SCI)，Economic Research International，管理學報 (TSSCI)，亞太經濟管理評論，台灣期貨與衍生性商品學刊。

E-mail: fyichen@cc.shu.edu.tw

陳靖

畢業於世新大學財務金融研究所。主修財務工程學。

E-mail: jing5978@hotmail.com