SSN 1023-2842
中山管理評論　2003 年秋季號
第十一卷第三期　pp.571-596

最適投資決策與產品生命週期－實質選擇權分析法

The Optimal Investment Decision and Product Life Cycle－A Real Options Approach

廖四郎[*] *Szu-Lang Liao*
陳坤銘 *Kun-Ming Chen*
國立政治大學
National Cheng-Chi University

鄭宗松 *Tsong-Sung Cheng*
景文技術學院會計學系

91 年 10 月 6 日收稿、10 月 28 日第一次修改、92 年 1 月 3 日第二次修改、92 年 1 月 30 日接受刊登

摘　　要

本文應用實質選擇權分析法探討廠商最適投資決策問題。當投資計畫具有不可回復性、時間選擇性及現金流量不確定性時，傳統淨現值法無法評價投資計畫的時間與營運彈性，因而低估投資計畫價值。本文之特性在於同時將產品生命週期以及市場獨占力之影響納入模型中。我們所得之最適投資時點將比淨現值法延後，但是比 McDonald and Siegel(1986)模型提前。最後，本文利用數值方法探討影響最適投資決策的決定因素。本文發現，當廠商獨占力量愈大、產品生命週期愈長、不確定程度增加、折現率較低以及當成本與收益函數有負相關時，都會提高投資的門檻及其實質選擇權價值，導致最適投資時點往後延遲。

關鍵詞：不可回復性、產品生命週期、實質選擇權

* 作者感謝審查委員的寶貴意見。文章中任何的錯誤，均屬我們的責任。

Abstract

This paper applies a real options approach to analyze optimal investment decision. When the investment projects have the characteristics of irreversibility, uncertainty and the ability to wait, the traditional Net Present Value (NPV) method will underestimate the value of investment, since it neglects the values of timing and operational flexibility. The distinctive feature of this paper is that the effects of product life cycle as well as market power are incorporated into the model. It is shown that the optimal waiting of the investment is shorter than the models of McDonald and Siegel(1986). Finally, a numerical method is used to analyze the determinants of optimal investment decision. Our results indicate that the investment-ratio threshold will be higher and thus the optimal entry time of the investment will delay when (1)the market power is larger, (2)the product life is longer, (3)the uncertainty is larger, (4)the discount rate is lower, and (5)the correlation between cost and revenue is more negative.

Keywords: Irreversibility、Product Life Cycle、Real Options Approach

壹、前　　言

傳統淨現值法（Net Present Value，NPV）認爲只要投資計畫淨值大於零，此項計畫就值得執行。惟此理論忽略了投資計畫具有未來報酬的不確定性、設廠的不可回復性（Irreversibility），與可以隨意選擇投資時間，以等待更好的投資時機等三個特色。若多考慮了這些特色，投資計畫淨值大於零卻不必然值得立刻投資。而投資計畫淨值小於零也不必然是不值得投資，因爲有時延後投資可以獲取更好的資訊，結果報酬率可能更高。

晚近出現之實質選擇權理論（Real Options Approach）就是在於修正淨現值法之缺失，將投資決策的管理彈性（managerial flexibility）納入模型之中。Kogut and Kulatilaka（1994）、Trigeorgis（1995）與 Brennan and Trigeorgis（2000）等文獻主張，面對未來不確定的市場發展狀況，應保持管理決策之彈性，以適時修正管理策略，掌握最佳的投資機會。實質選擇權理論在於突顯管理決策的彈性價值，可應用於高科技產業、自然資源的開採以及流行服飾與消費財等均具有投資不可回復之特性。

對於投資決策彈性之價值可以分爲時間價值以及規模變動營運價值。有關投資營運決策彈性的時間價值，McDonald and Siegel（1986）與 Dixit and Pindyck（1994）認爲，在計畫價值、成本或價格不確定的情況下[1]，投資計畫的執行，可以視爲擁有等待選擇權的買權（call option），因此當成本完全不可回復時，不確定性將會延緩投資。然而，Abel et al.（1996）指出，若廠商未來要擴充產量且成本具有部分可回復的性質，則立即投資等於擁有賣權（put options），因此不確定性將會增加投資，所以不可回復性並不是延緩投資的充分條件。

早期實質選擇權文獻假設產量固定，並未考慮規模變動的營運價值。Pindyck（1988）假設當資產價值的變動爲具有漂移項的幾何布朗運動（geometric Brownian Motion）過程且投資成本爲固定而不可回復，他發現廠商的最適產能投資應該包含規模變動之營運彈性價值[2]。Bollen（1999）擴充 Pindyck（1988）模型，他發現實質選擇權的價值來自於產量應該隨著不同產品生命週期（Product Life Cycle（PLC））階段作適當的調整，否則會低估（高估）投資案的縮減（擴張）選擇權價值[3]。由此可知，應用實質選擇權做投資決策分析，產品之生命週期是重要的考慮因素。前述文獻假設市場爲完全競爭型態，但是 Caballero（1991）與 Sodal（2001）發現，不確定性是否會減少投資仍須考慮市場結構。Sodal（2001）證明，市場需求價格彈性愈低，亦即市場的獨佔力量愈大，將會增加規模選擇權的價值，因此廠商將會延後投資。Hong and Sterken（2001）利用荷蘭多國籍公司檢驗實質選擇權理論，實證結果顯示，若能考慮銷售量的成長率與市場的獨佔力量，則實質選擇權理論較適合解釋投資決策[4]。惟目前文獻仍未有同時考慮銷售量的成長率與市場獨佔力量對等待選擇權價值影響的理論模型。本文目的在於應用實質選擇權理論，探討廠商最適投資決策問題。本文之特色就是在立基於 McDonald and Siegel（1986）與 Pindyck and Dixit（1994）模型，同時考慮產品的市場獨占力與生命週期兩個重要因素對等待選擇權價值與投資決策的影響。

---

[1] 投資計畫的不確定性也可能是來自於利率波動的影響，參見 Ingersoll and Ross（1992）。

[2] Triantis and Hodder（1990）指出，在一個生產具有彈性的系統，應該考量產品生命週期才能掌握生產彈性的真正價值。

[3] 若市場條件比預期理想，廠商可以擴充規模等於是廠商具有擴充選擇權（expand option）；反之，若市場條件變弱時可以縮減營運規模，則此時廠商具有縮減選擇權（contraction option）。有關擴充與縮減選擇權的文獻請參考 Pindyck（1988）、Trigeorgis and Mason（1987）、McDonald and Siegel（1985）。

[4] Gusio and Parigi（1999）的實證研究也指出，當產品的價格彈性越小，則不確定性對於投資決策的影響力越大。

本文結構如下：第一節為前言，第二節為理論模型的設定。首先介紹產品生命週期的基本模型，其次假設廠商同時面臨財貨需求與價格的不確定性，將產品生命週期的架構引入，求出廠商收益函數的隨機過程。第三節討論在產品生命週期下，將成本函數分為固定與隨機兩種狀況，分別評價廠商延遲投資的實質選擇權價值。第四節為模型的數值模擬分析，討論影響實質選擇權價值變動的主要因素及其影響。第五節為結論。

貳、基本假設與理論模型

一、產品生命週期（PLC）

本文以下先考慮完整的 PLC 假說，然後在此架構下推導出廠商的收益函數，並且以獨占性競爭廠商為例，在固定邊際成本與隨機成本等兩種成本函數的型態假設下，說明 PLC 對利潤函數隨機過程的影響。

PLC 模型認為，一個新產品出現之後，由於市場條件的改變，其銷售量的時間趨勢與變動將呈現一種倒 U 字型。在新產品的成長期階段，產品銷售量的成長率大於零；惟在產品生命週期的第二階段，由於替代品出現、顧客偏好的改變等因素，使得成長率為零，表示產品處於成熟期[5]。最後，在產品生命週期的第三階段，由於產品之設計與製造過程漸趨標準化，產品間的差異性逐漸減少，而替代性逐漸增加，使得銷售成長率小於零，表示處於產品衰退期。

根據上述產品生命週期的特性，令 Y 為該產品整個生命週期的總銷售量，假設在時點 t 時，消費者的購買量為 $Q(t,Y)$ 以及採用新產品的機率密度函數 $f_1(t)$。另外，我們假設消費者購買新產品總數量與購買時點無關，因此

$$Q(t,Y)=f_1(t)Y \tag{1}$$

（1）式表示產品在時點 t 的銷售量 $Q(t,Y)$ 等於總銷售量(Y)乘以使用新產品的機率 $f_1(t)$[6]。由（1）式可知，PLC 的特性可以由顧客在時點 t 採用新產

[5] 成熟期可以分為三個階段：（1）成長的成熟期，銷售成長開始下降；（2）穩定成熟期，市場飽和，銷售停滯；（3）衰退成熟期，銷售量開始下降，客戶開始改買其他產品和替代品。

[6] Bass（1969）與 Norton and Bass（1987）假設生命週期總銷售量為固定常數值 Y；而產品的生命週期表現在消費者採用的機率密度函數 $f_1(t)$ 上，也就是說，$Q(t,Y)=f_1(t)Y$。為分析投資決策的最適時點與規模，此處假設總銷售量 Y 為固定並不會影響模型的結論，

品的機率密度函數 $f_1(t)$ 所掌握。爲了能有進一步的瞭解，我們假設消費者在時點 t 採用新產品的機率密度函數 $f_1(t)$ 爲 Weibull 分配[7]：

$$f_1(t)=\frac{\beta(t-t^*)^{\beta-1}}{\theta^{\beta}}\exp\left[-(\frac{t-t^*}{\theta})^{\beta}\right] \tag{2}$$

其中 β 爲形狀參數（shape parameter），θ 爲規模參數（scale parameter），描述產品的平均壽命期間，t^* 爲位置參數（location parameter）。

在不失一般性下，我們假設產品生命的時點起於 0，亦即 $t^*=0$，因此（2）式可以改寫成

$$f_1(t)=\frac{\beta t^{\beta-1}}{\theta^{\beta}}\exp\left[-(\frac{t}{\theta})^{\beta}\right] \tag{3}$$

依據 PLC 假說，當產品到達成熟期時，產品成長率爲零，因此 $f_1'(t)=0$。令未來成長率的最高時點爲 T^*，即產品的成熟期時點；若產品的時點小於 T^*，則產品處於成長期($f_1'(t)>0$)；若時點大於 T^*，則產品處於衰退期($f_1'(t)<0$)。

爲了掌握產品生命週期最終將進入衰退期之特性，本文假設產品銷售量具有指數分配（exponential distribution）的特性，亦即令 $\beta=1$，則 Weibull 分配等於指數分配，因此（3）式可以再簡化成：

$$f_1(t)=\frac{1}{\theta}\exp\left[-(\frac{t}{\theta})\right] \tag{4}$$

二、廠商的收益函數

Carruth et al.（2000）假設在每個時點財貨價格 $P(t)$ 爲均衡價格，則市場的需求函數可以寫成

$$P(t)=\Phi(t)Q(t)^{-1/\eta} \tag{5}$$

其中參數 η 爲需求彈性；$\Phi(t)$ 爲需求不確定因素的隨機過程，假設其爲

參見附錄一之證明。

[7] 本文在此採用 Weibull 分配，主要是 Weibull 分配相當一般化，包含一些重要的分配。例如，當 $\beta=1$ 時，Weibull 分配爲指數分配；$\beta=2.5$ 時，Weibull 分配爲常態分配；$\beta=3.6$ 時，Weibull 分配爲對數常態分配。詳見 Dodson（1994）。

$$d\Phi = \Phi(\alpha dt + \sigma dz) \tag{6}$$

其中 α 爲 Φ 的每單位時間瞬時平均變化率，而 σ 爲每單位時間瞬時變化率的標準差， dz 是 Wiener process 的增量。

因此，廠商在時點 t 的收益函數 $R(t)$ 等於

$$R(t) = P(t)Q(t) = \Phi[Q(t)]^{1-\frac{1}{\eta}} \tag{7}$$

由 Ito's Lemma 可以求出收益函數動態過程爲（請參見附錄一）

$$\frac{dR}{R} = [\alpha + (1-\frac{1}{\eta})\cdot\frac{f'(t)}{f(t)}]dt + \sigma dz = [\alpha + (1-\frac{1}{\eta})\lambda(t)]dt + \sigma dz \tag{8}$$

其中 $\lambda(t) = f_1^{'}(t)/f_1(t)$ ，表示在時點 t 使用新產品的成長率。

當 $\beta = 1$ 時，以及由（4）式，則（8）式可以簡化成:

$$\frac{dR}{R} = \left\{\alpha - (1-\frac{1}{\eta})\left[\frac{1}{\theta}\right]\right\}dt + \sigma dz \tag{9}$$

過去文獻，如 Pindyck and Dixit（1994）、McDonald and Siegel（1986），其收益函數隨機過程僅包含需求衝擊的平均成長率 α 與變異程度 σ^2 。而在產品生命週期假設下，獨占性競爭產業的投資收益函數（9）式中，我們同時考慮價格與銷售量的市場條件，如使用新產品的生命週期 θ 與需求彈性 η 。

三、廠商的成本函數

在成本函數的設定上，爲了與 Pindyck and Dixit（1994）模型與 McDonald and Siegel（1986）模型進行比較，我們分別考慮固定邊際成本與隨機成本函數兩種情況，來分析投資計畫在與實質選擇權下的評價。

第一種情況，我們參照 Schwartz and Moon（2000），假設廠商的不可回復成本可以分爲兩種類別：承諾成本（committed cost）與變動成本。廠商一進入市場就必需支付進場的固定成本，如廠房設備或是研究發展支出，通常此一承諾成本都相當地高。進入市場之後，邊際成本將趨於固定[8]，因此假設廠商的變動成本爲收益函數的固定比例[9]。故在未來時間點 t 時，營運的成本函數

[8] Sodal（2001）假設獨佔廠商的邊際成本爲固定，求出廠商最適化條件，可以得到總成本爲收益函數的固定比例。

[9] Schwartz and Moon（2000）假設比例 γ 是隨機變數，再利用廠商資料計算出公司價值，最

$C(t)$ 為

$$C(t) = \gamma R(t) \tag{10}$$

其中 γ 為小於 1 的常數。

第二種情況，由於要素價格（工資、利率）的外生變動，使得生產成本 I 亦為一個隨機過程，因此我們參照 McDonald and Siegel（1986），假設成本函數為幾何布朗運動

$$dI_t = I_t(\alpha_I dt + \sigma_I dz_I) \tag{11}$$

其中 α_I 為生產成本 I 的每單位時間瞬時平均變化率，而 σ_I 為每時間單位變化率的標準差， dz_I 是 Wiener process 的增量。

參、產品生命週期、市場獨佔力與實質選擇權評價

一、收益函數、利潤函數與投資計畫價值之關係

依照 Schwartz and Moon（2000）模型，假設在時間 t 營運的成本函數 $C(t) = \gamma R(t)$ ，因此在時間 t ，廠商的利潤流量（flow）可以寫成

$$\pi(t) \equiv [P(t)Q(t) - C(t)] = (1-\gamma)R(t) \tag{12}$$

由(12)式可求得

$$\frac{d\pi}{\pi} = \frac{dR}{R} \tag{13}$$

假設消費者採用新產品的機率密度函數為 Weibull 分配，因此利潤函數及其動態過程分別為

$$\pi_s = \pi_t e^{\left(\alpha - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(s-t) + \left(1 - \frac{1}{\eta}\right)\int_t^s \left[(\beta-1)u^{-1} - \beta\left(\frac{1}{\theta}\right)^{\beta} u^{\beta-1}\right]du + \sigma z_{s-t}}, \quad s \geq t \tag{14}$$

後作數值分析。本文為求出解析解，因此我們假設 γ 是固定數。有關隨機成本函數的設定，將於下節說明。

$$\frac{d\pi_t}{\pi_t} = \left\{ \alpha + (1-\frac{1}{\eta})\left((\beta-1)t^{-1} - \beta\left(\frac{1}{\theta}\right)^{\beta} t^{\beta-1} \right) \right\} dt + \sigma dz \tag{15}$$

假設V_t為在時間t的產品計畫價值，而計畫的價值來自於利潤函數未來的折現值，因此，

$$\begin{aligned} V_t &= E\left[\int_t^{\infty} \pi_s \cdot e^{-\delta(s-t)} ds \middle| \Im_t \right] \\ &= E\left[\int_t^{\infty} \pi_t \cdot e^{(\alpha-\delta-\frac{1}{2}\sigma^2)(s-t)+\sigma\cdot z_{s-t}+\left(1-\frac{1}{\eta}\right)\left[(\beta-1)Ln\left(\frac{s}{t}\right)-(\frac{1}{\theta})^{\beta}(s^{\beta}-t^{\beta})\right]} ds \middle| \Im_t \right] \\ &= \pi_t \int_t^{\infty} e^{(\alpha-\delta)(s-t)-\left(1-\frac{1}{\eta}\right)\left[(\frac{1}{\theta})^{\beta}(s^{\beta}-t^{\beta})\right]} \cdot \left(\frac{s}{t}\right)^{\left(1-\frac{1}{\eta}\right)(\beta-1)} ds \end{aligned} \tag{16}$$

其中$E[\cdot|\Im_t]$為在t期訊息$\Im_t$下的條件期望值。

（16）式表示在時間t的投資計畫價值等於未來所有時間$s>t$的利潤流量π_s的折現值總和，折現率為δ，其數值將於下節決定。

假設銷售量為指數分配，則 Weibull 分配中之β等於 1。在此情況下，（16）式可以簡化為

$$V_t = \pi_t \int_t^{\infty} e^{(\alpha-\delta)(s-t)-\left(1-\frac{1}{\eta}\right)\left[(\frac{1}{\theta})(s-t)\right]} ds = \frac{\pi_t}{\delta-\alpha+\frac{1}{\theta}\left(1-\frac{1}{\eta}\right)} \tag{17}$$

若與 Pindyck and Dixit（1994）結果比較[10]，（17）式表示，在考慮 PLC 與廠商市場獨占力的架構下，計算產品計畫價值時，其利潤流量π_s的折現因子中必須多考慮需求價格彈性η以及產品生命週期θ。若以 Lerner 指標(M_L)衡量廠商的獨占力：$M_L = \dfrac{P-MC}{P}$，當廠商利潤極大化時，M_L可以改寫成$M_L = \dfrac{1}{\eta}$，可見需求價格彈性與廠商之市場獨占力呈反向變動。由（17）式可知，在本文架構下，產品計畫價值與價格彈性η以及產品生命週期θ兩個因素

[10] 參見 Pindyck and Dixit（1994, p.144），投資計畫價值$V_t = \dfrac{\pi_t}{\delta-\alpha}$。

息息相關。

（17）式顯示，當考慮產品生命週期的長短(θ)與市場獨占力(η)時，因爲$\frac{1}{\theta}(1-\frac{1}{\eta})$大於零[11]，因此產品計畫的折現值將大於未考慮產品生命週期與市場力量的折現值。另外，從（17）式可得

$$\frac{dV_t}{V_t}=\frac{d\pi_t}{\pi_t}=\frac{dR_t}{R_t} \tag{18}$$

（18）式表示當消費者採用的機率密度函數爲指數分配時，投資計畫價值與利潤（收益）具有相同的成長率。另一方面，由（9）與（18）式可得：

$$\frac{d\pi_t}{\pi_t}=\left\{\alpha-\frac{1}{\theta}(1-\frac{1}{\eta})\right\}dt+\sigma dz \tag{19}$$

因此，投資計畫價值的隨機過程爲

$$dV_t=V_t\left[\alpha-\frac{1}{\theta}\left(1-\frac{1}{\eta}\right)\right]dt+V_t\sigma dz \tag{20}$$

（20）式所推導出之投資計畫價值函數，相較於 McDonald and Siegel(1986) 與 Pindyck and Dixit（1994），具有以下兩點差異：（1）可以突顯廠商追求利潤的動機，而利潤決定於價格與需求互動的市場條件，如財貨的產品生命週期與價格彈性。（2）不再任意的設定計畫的價值爲簡單的幾何布朗運動過程，而是提供計畫價值爲幾何布朗運動過程的理論基礎。

二、固定邊際成本函數的評價模型

當投資成本具有不可回復性且爲固定數I_0，時間 $t=0$的生產新財貨計畫的實質選擇權價值爲

$$F(V,0)=\underset{t_1\in[0,T]}{Max}\,E_0[(V_{t_1}-I_0)e^{-\delta t_1}] \tag{21}$$

其中E_0表示在時間0的條件期望值運算子，t_1表示預期未來最佳投資的時點

---

[11] $MR=p\left[1-\frac{1}{\eta}\right]$，若$\eta<1$，則$MR<0$。因此利潤極大化的廠商不可能生產需求彈性小於1的財貨。

[12]。對應於金融選擇權，T 爲產品生命週期結束的到期日，I_0 則爲執行價格。

假設廠商進入市場成本爲固定邊際成本函數的情況下，產品生命週期與市場力量對於投資時點的影響，列於定理一。

定理一：若廠商進入市場成本爲固定邊際成本函數與完全不可回復，則在考慮產品生命週期與市場獨占力因素下的最適投資時點的門檻值 V^* 爲

$$V^* = \frac{b}{b-1} I_0 \tag{22}$$

$$b = \frac{1}{2} - \frac{\left[\alpha - \frac{1}{\theta}\left(1 - \frac{1}{\eta}\right)\right]}{\sigma^2} + \left\{\left[\frac{\left[\alpha - \frac{1}{\theta}\left(1 - \frac{1}{\eta}\right)\right]}{\sigma^2} - \frac{1}{2}\right]^2 + 2\delta/\sigma^2\right\}^{\frac{1}{2}} > 1 \tag{23}$$

【證明】見附錄二。

由（22）與（23）兩式可以求出廠商投資機會的價值與最適的投資原則，亦即可以求出計畫價值的臨界值 V^*。當 V_t 初次大於或等於 V^* 時，廠商即可進行投資。由（23）式可知，在其他條件不變之下，（1）產品生命週期越長，廠商可以等待的時間越長，因此產品計畫價值提高；（2）價格彈性越小，廠商市場獨占力越大，可以等待更多的訊息再進行投資，因此亦使得產品計畫價值提高[13]。（3）折現率 δ 較低表示未來相對重要，因此會增加執行投資計畫的機會成本，因此將降低投資選擇權的價值[14]。（4）不確定性增加，將提高投資門檻（實質選擇權價值），因此將延緩投資計畫的進行。

另外，$b>1$，因此 $b/(b-1)>1$ 且 $V^*>I_0$，所以傳統的淨現值法並不正確。若投資案具有不確定性與不可回復性，必須考慮實質選擇權的價值等於計畫價值臨界值與固定（入場）成本的差距，而此差距的大小受到 $b/(b-1)$ 的影響。爲瞭解模型中這些參數之重要性，我們在第四節將進行有關參數的敏感性分析，檢視這些模型參數的改變對於最適投資原則與實質選擇權價值的影響程

[12] McDonald and Siegel（1986）認爲許多實質計畫案的生命並不是無窮期，同時一旦執行或者是在某些時點將會變得沒有價值。但是，由於他們允許執行計畫所獲得利益的現值呈現平均向下的趨勢以及計畫的現金流量現值可爲 0，但卻不知道到期日，因此可假設到期日爲無窮期。

[13] Sodal（2001）發現較低的需求彈性將會提高等待選擇權的價值，與本文模型得到相同的結果。

[14] Sodal（2001）亦證明較高的折現率需求彈性將會降低等待選擇權的價值。

度。

根據上述結果可以引申出下面幾點結論：(1) 傳統的淨現值法顯然低估投資決策的最適門檻，無法掌握到管理決策的彈性價值，使得廠商發生投資過早的情形。(2) 雖然實質選擇權理論在於突顯管理決策的彈性價值，但是本文進一步指出廠商的投資決策尚須考慮產業特性，如產品的生命週期與市場需求彈性的因素，如此才能正確評估管理決策的彈性價值。(3) 定理一的結論顯示出當產品生命週期愈短，如某些高科技產業，應儘早投資；而產品的市場獨占力愈弱，則產品的選擇權價值愈低，因此廠商應提前投資。(4) 不確定性增加，將提高投資門檻（實質選擇權價值），因此將延緩投資計畫的進行。由此可知，穩定的經濟環境是提高投資意願的重要因素。

三、隨機成本函數的評價模型

在上小節中，我們假設成本函數爲收益函數固定比例，此隱含兩者的相關係數爲 1。但事實上投資計畫的成本會受到要素價格外生波動的影響。因此，考慮一個不可回復的投資計畫，其中成本函數與計畫價值函數皆爲隨機過程，似乎比較合乎實際的情況。

假設在時間 $t=0$ 投資計畫的價值 $X(V,I,0)$ 爲

$$X(V,I,0)=\underset{t'}{Max}\,E_0[(V_{t'}-I_{t'})e^{-\delta \cdot t'}] \tag{24}$$

其中 t' 表示第一次到達臨界值的時間。

由 (20) 式可以得到投資計畫價值 V 的隨機過程爲

$$dV_t=V_t\left[\alpha_V-\frac{1}{\theta}\left(1-\frac{1}{\eta}\right)\right]dt+V_t\sigma_V dz_V \tag{25}$$

爲了能與定理一有所比較，此處令 $\alpha_V=\alpha$ ，$\sigma_V=\sigma$ 。

在定理二，我們考慮廠商進入市場成本與投資計畫價值均爲幾何布朗運動時，產品生命週期與市場獨占力對於投資時點的影響。

定理二：當不可回復投資計畫的成本與價值分別爲 (11) 與 (20) 式，評估投資計畫在 PLC 與市場獨佔力因素下的最適投資時點門檻值 X^* 爲

$$X^*=(B^*-1)I^*\left(\frac{\overline{V}/I^*}{B^*}\right)^n \tag{26}$$

$$B^* = n/(n-1) \tag{27}$$

其中I^*與$\overline{V}$爲投資計畫的起始值，（27）式中之n爲

$$n = \frac{1}{2} - \frac{\alpha_V - \frac{1}{\theta}\left(1-\frac{1}{\eta}\right) - \alpha_I}{\omega^2} + \left\{\left[\frac{\alpha_V - \frac{1}{\theta}\left(1-\frac{1}{\eta}\right) - \alpha_I}{\omega^2} - \frac{1}{2}\right]^2 + 2\frac{(\delta-\alpha_I)}{\omega^2}\right\}^{\frac{1}{2}} \tag{28}$$

此處，$\omega^2 = \sigma_V^2 + \sigma_I^2 - 2\sigma_{VI}$，$\sigma_{VI} = \rho_{VI}\sigma_V\sigma_I$爲投資計畫價值與成本的共變數。

【證明】見附錄三。

由（28）式可知，n值大於 1，因此與上節情況相同，傳統的淨現值法將低估了投資計畫的成本。此外，在其他條件不變之下，（1）產品生命週期越長，廠商可以等待的時間越長，因此產品計畫價值提高。（2）價格彈性越小，廠商市場獨占力越大，可以等待更多的訊息再進行投資，因此亦使得投資計畫價值提高。（3）折現率δ較低表示未來相對重要，因此會增加執行投資計畫的機會成本，因此將提高投資選擇權的價值。（4）不確定性增加，將提高投資門檻（實質選擇權價值），因此將延緩投資計畫的進行。（5）若投資計畫價值與成本的相關係數ρ_{VI}爲負，表示不確定程度增加，將使投資門檻比例提高，亦即隨著投資計畫價值與成本的相關程度降低時，將增加投資選擇權的價值。

由於定理二之結果除第（5）點外，與定理一大致相同，因此引申出來的結論與定理一相同。惟定理二的結論顯示，投資計畫價值與成本的相關程度越低，投資選擇權的價值越高。因此，當廠商面對要素市場與財貨市場相關程度較低時，投資的機會成本將會增加，投資之最適時點後移。有關參數的敏感性分析，將於第四節討論。

四、折現率δ的決定

由定理一與定理二可知，折現率δ將會影響投資的機會成本。但是如何求出折現率δ？利用 Ito's 引理對投資計畫的實質選擇權價值$X(V,I,0)$微分，以求出選擇權價值的報酬率：

$$\frac{dX^*}{X^*}=\frac{n\cdot dV}{V}+(1-n)\frac{dI}{I}+n(1-n)\left(\frac{1}{2}\sigma_V^2+\frac{1}{2}\sigma_I^2-\rho_{VI}\sigma_V\sigma_I\right)dt$$
$$=\left[n\left(\alpha_V-\frac{1}{\theta}(1-\frac{1}{\eta})\right)+(1-n)\alpha_I+\frac{1}{2}n(n-1)\omega^2\right]dt+n\sigma_V dz_V+(1-n)\sigma_I dz_I \tag{29}$$

假設投資者可以完全分散風險，根據資本資產定價方法（Capital Asset Pricing Model（CAPM）），我們有

$$\hat{\alpha}_i-r=\xi\cdot\rho_{im}\cdot\sigma_i \tag{30}$$

其中$i=V,I$ ，$\hat{\alpha}_i$爲資產i的必要報酬率，r爲無風險利率，ξ爲風險的市場價格（market price of risk）[15]，ρ_{im}爲投資報酬率與市場組合的相關係數。

在市場均衡下，未來報酬的折現率δ等於（29）式的期望值：

$$\delta=r+n(\hat{\alpha}_V-r)+(1-n)(\hat{\alpha}_I-r)=n\cdot\hat{\alpha}_V+(1-n)\hat{\alpha}_I \tag{31}$$

代入（30）式可以得到

$$\delta=n\cdot\hat{\alpha}_V+(1-n)\hat{\alpha}_I=n\left[\alpha_V-\frac{1}{\theta}\left(1-\frac{1}{\eta}\right)\right]+(1-n)\alpha_I+\frac{1}{2}n(1-n)\omega^2 \tag{32}$$

由（32）式可以求出（28）式的n：

$$n=\frac{1}{2}-\frac{\delta_I-\delta_V-\frac{1}{\theta}(1-\frac{1}{\eta})}{\omega^2}+\left\{\left[\frac{\delta_I-\delta_V-\frac{1}{\theta}(1-\frac{1}{\eta})}{\omega^2}-\frac{1}{2}\right]^2+2\frac{\delta_I}{\omega^2}\right\}^{\frac{1}{2}} \tag{33}$$

其中$\delta_V=\hat{\alpha}_V-\alpha_V$，$\alpha_V$爲計畫價值的平均成長率，$\delta_I=\hat{\alpha}_I-\alpha_I$，$\alpha_I$爲計畫成本的平均成長率，$\hat{\alpha}_V$與$\hat{\alpha}_I$爲風險中立下的漂移項。

δ_V表示投資計畫價值V必要報酬之比例，若風險中立下的漂移項爲零，此時未來投資的成長選擇權等於計畫價值的平均成長率。若δ_V增加表示持有的成本愈高，(未來成長機會α_V愈低，表示產品未來的成長率可以提供投資計畫的成長選擇權價值愈低)，因此投資門檻比例會降低。同理，δ_I表示投資計

[15] 亦即$\xi=(r_m-r)/\sigma_m$，其中r_m爲市場投資組合（market portfolio）預期報酬；σ_m爲市場投資組合預期報酬的標準差。

畫成本 I 必要報酬之比例，亦即，當成本增加時，延遲投資可以得到的價值增加，因此投資門檻比例會提高。

McDonald and Siegel（1986）認爲，計畫價值與成本個別的漂移項可以透過轉換而消失，僅需瞭解兩者之間的差距即可。但是（33）式表示，在考慮 PLC 與市場獨佔力的架構下，計畫價值使用折現率 δ 的計算[16]，除了需要瞭解計畫價值與成本個別漂移項之間的差距外，還必須額外考慮價格彈性（η），以及產品生命週期的長短（θ）。

肆、最適投資決策的特性—數值模擬分析

本文在第三節已經得到產品生命週期下實質選擇權價值的解析解（analytic solution），因此本節擬針對上一節兩個定理進行模擬分析，以進一步瞭解模型中一些參數之重要性。定理一假設只有計畫價值具有不確定性，因此參照 Pindyck and Dixit（1994）的作法，求出最適投資門檻與最適投資決策。而在定理二，因爲計畫價值與成本同時具有不確定性，因此參照 McDonald and Siegel（1986）的作法，求出最適投資比例的門檻值。

由定理一之（22）、（23）兩式可知，最適投資決策與投資實質選擇權價值的特性將會受到 b 所包含的參數的影響。因此，要分析在 PLC 架構下實質選擇權的價值，除了考慮傳統文獻的決定因素如數量變異程度 σ^2、折現率 δ 與瞬時成長率 α 外，同時還必須考慮產品生命週期 θ、與廠商的獨占能力 η 等重要參數的變動。參照 Pindyck and Dixit（1994），我們將基本參數設定爲固定成本 $I_0 = 1$，投資計畫的折現率 $\delta = 0.1$，需求衝擊的變異程度 $\sigma = 0.2$。至於需求彈性應大於 1，否則廠商的邊際收益將會小於零，因此假設 $\eta = 1.2$；產品的生命週期 $\theta = 2$，表示產品可存活兩期。

由表一可知，在前述基本參數設定下，我們由（22）、（23）兩式，可以得到最適投資決策計畫價值的門檻等於 1.21，大於固定成本 $I_0 = 1$，表示傳統的淨現值法將低估了投資計畫的成本，而且幅度相當可觀。

此外，由表二可知，本文與 McDonald and Siegel（1986）結果比較，在基本參數值設定下，本文得到之最適投資門檻值爲 1.36，而 McDonald and Siegel

[16] 若是在風險中立的假設下，則折現率等於無風險利率。

（1986）得到之值爲 1.86。在極端的情況下，亦即在相關係數爲-0.5、預期收益平均成長率爲 0.05 以及不確定性爲 0.3 時，額外考慮產品生命週期參數（θ）與廠商的市場力量（η）將使本文數值結果爲 4.97，而 McDonald and Siegel(1986) 卻高達 11.8。由此可見，若未考慮產品生命週期參數（θ）與廠商的市場力量（η），將嚴重高估投資門檻。

表一　固定邊際成本函數假設下，最適投資門檻值之敏感性分析

參數	α		
	0.01	0.02	0.05
$\theta=2$，$\eta=1.2$，$\sigma=0.2$，$\delta=0.10$	1.21	1.34	1.59
$\theta=5$，$\eta=1.2$，$\sigma=0.2$，$\delta=0.10$	1.38	1.71	3.95
$\theta=2$，$\eta=2.0$，$\sigma=0.2$，$\delta=0.10$	1.08	1.13	1.16
$\theta=2$，$\eta=1.2$，$\sigma=0.3$，$\delta=0.10$	1.43	1.62	1.08
$\theta=2$，$\eta=1.2$，$\sigma=0.2$，$\delta=0.20$	1.19	1.33	1.57

說明：

(1)符號意義

α：需求衝擊的平均成長率，δ：投資計畫的折現率，θ：產品的生命週期，I_0：固定成本

σ：需求衝擊的變異程度，η：需求彈性

(2)基本參數設定：

(A)依照 Dixit and Pindyck（1994）之設定 $I_0=1$，$\delta=0.10$，$\sigma=0.2$。

(B)需求彈性 $\eta=1.2$：由於獨佔廠商不可能生產價格彈性小於 1 的財貨。

(C) $\theta=2$ 表示廠商產品生命可存活 2 期。

(3)斜體字爲最適投資時點的門檻值 V^*。其中最適投資時點的門檻值 V^* 可以由（22）式以及（23）式求出。例如，$\alpha=0.01$，$I_0=1$，$\theta=2$，$\eta=1.2$，$\sigma=0.2$，$\delta=0.10$ 時最適投資時點的門檻值 V^* 等於 1.21。當其他參數相同時，$\theta=5$ 最適投資時點的門檻值 V^* 等於 1.38。表示當產品生命週期變長、將會提高投資門檻使得投資決策延後。另外，當其他參數相同時，$\eta=2$，最適投資時點的門檻值 V^* 等於 1.08。表示當廠商獨占力變小、將會降低投資門檻使得投資決策提前。

表二　隨機成本函數假設下，最適價值/成本投資比例門檻值之敏感性分析

δ_V	0.05			0.10			0.25		
ρ_{VI} $\sigma_V^2=\sigma_I^2$	-0.5	0.0	0.5	-0.5	0.0	0.5	-0.5	0.0	0.5
0.01	1.27 (2.50)	1.20 (2.35)	1.11 (2.18)	1.15 (1.47)	1.10 (1.37)	1.05 (1.25)	1.06 (1.09)	1.04 (1.06)	1.02 (1.03)
0.02	1.46 (2.91)	1.34 (2.64)	1.20 (2.35)	1.28 (1.72)	1.20 (1.56)	1.10 (1.37)	1.12 (1.18)	1.08 (1.12)	1.04 (1.06)
0.04	1.78 (3.65)	1.57 (3.17)	1.34 (2.64)	1.51 (2.13)	1.36 (1.86)	1.20 (1.56)	1.23 (1.34)	1.16 (1.24)	1.08 (1.12)
0.10	2.58 (5.65)	2.15 (4.56)	1.68 (3.41)	2.10 (3.19)	1.79 (2.62)	1.44 (2.00)	1.55 (1.77)	1.38 (1.54)	1.20 (1.29)
0.20	3.80 (8.77)	3.00 (6.70)	2.15 (4.56)	3.00 (4.79)	2.41 (3.73)	1.79 (2.62)	2.05 (2.44)	1.72 (2.00)	1.38 (1.54)
0.30	4.97 (11.8)	3.80 (8.77)	2.58 (5.65)	3.85 (6.34)	3.00 (4.79)	2.10 (3.19)	2.53 (3.07)	2.05 (2.44)	1.56 (1.77)
δ_I=0.01	1.47 (2.31)	1.31 (1.89)	1.16 (1.46)	1.34 (1.64)	1.22 (1.43)	1.11 (1.22)	1.18 (1.25)	1.12 (1.17)	1.06 (1.08)
δ_I=0.05	1.59 (2.85)	1.41 (2.38)	1.22 (1.86)	1.41 (1.83)	1.28 (1.58)	1.14 (1.32)	1.21 (1.28)	1.14 (1.19)	1.07 (1.10)
δ_I=0.10	1.78 (3.65)	1:57 (3.17)	1.34 (2.64)	1.51 (2.13)	1.36 (1.86)	1.20 (1.56)	1.24 (1.34)	1.16 (1.24)	1.08 (1.12)
δ_I=0.25	2.61 (6.42)	2.39 (5.96)	2.15 (5.49)	2.01 (3.35)	1.84 (3.09)	1.64 (2.81)	1.39 (1.62)	1.29 (1.49)	1.17 (1.33)
θ=2.0	1.78	1.57	1.34	1.51	1.36	1.20	1.24	1.16	1.08
θ=5.0	2.42	2.11	1.75	1.77	1.57	1.34	1.29	1.20	1.10
η=1.2	1.78	1.57	1.34	1.51	1.36	1.20	1.24	1.16	1.08
η=2.0	1.27	1.19	1.10	1.22	1.15	1.08	1.14	1.10	1.05

說明：

(1)符號意義：

$\delta_{1\cdot}=\hat{\alpha}_{1\cdot}-\alpha_{1\cdot}$，$\delta_{I}=\hat{\alpha}_{I}-\alpha_{I}$，其中$\alpha_{1\cdot}$：計畫價值的平均成長率，$\alpha_{I}$：計畫成本的平均成長率，$\hat{\alpha}_{1\cdot}$與$\hat{\alpha}_{I}$爲風險中立下的漂移項。$\rho_{1\cdot I}$投資計畫價值與成本的相關係數。$\sigma_{V}$:計畫價值的變異程度，$\sigma_{I}$：計畫成本的變異程度，$\theta$：產品的生命週期，$\eta$：需求彈性

(2)基本參數設定：$\delta_{1\cdot}=\delta_{I}=0.10$，$\sigma_{1\cdot}^{2}=\sigma_{I}^{2}=0.04$，$\rho_{1\cdot I}=0$爲 McDonald and Siegel（1986）之設定。$\theta=2$，$\eta=1.2$之設定請參考表一之說明（2）。

(3)括弧中數字爲 McDonald and Siegel（1986）模擬結果。

(4)斜體字爲最適投資的門檻值比例（V/I），而V/I由（26）（27）（28）式求出。當考慮$\eta=1.2$，$\theta=2$時，本文結果最適投資門檻值$V/I=1.36$，表示投資計畫價值V應爲投資計畫成本I的 1.36 倍，因此傳統的淨現值法低估了投資計畫的營運彈性價值。而 McDonald and Siegel（1986）模擬結果爲$V/I=1.86$與本文結果比較，顯示可能高估投資計畫的營運彈性價值。

伍、結　　論

當投資計畫具有不可回復性、時間選擇性及現金流量不確定性時，傳統淨現值法由於未考慮投資計畫的時間與規模可變性等營運彈性，因而低估投資計畫價值。實質選擇權理論在於突顯管理決策的彈性價值，可以修正傳統淨現值法的缺點，因此本文應用實質選擇權分析法，探討廠商最適投資決策問題。本文之特色在於同時將產品生命週期以及市場獨佔力之影響納入模型之中。我們發現，投資計畫成本爲不可回復時，計畫的不確定性將會延遲投資決策之特性，此結果與 Dixit and Pindyck（1994）、McDonald and Siegel（1986）等人模型結果相似。惟最適投資的決策時點將比 McDonald and Siegel（1986）與 Dixit and Pindyck（1994）的模型提前。

此外，我們利用數值方法，探討影響最適投資決策的決定因素。本文發現，在一產品生命呈現衰退階段時，若未考慮廠商獨占力量以及產品生命週期，將嚴重高估投資門檻，此結果與 Bollen（1999）數值模擬分析以及 Hong and Sterken（2001）實證模型所得之結論一致。本文模擬結果亦顯示：在其他條件不變之下，（1）產品生命週期越長，廠商可以等待的時間越長，因此產品計畫價值提高。（2）價格彈性越小，廠商市場獨占力越大，可以等待更多的訊息再進行投資，因此亦使得投資計畫價值提高。（3）折現率δ較低表示未來相對重要，因此會增加執行投資計畫的機會成本，因此將提高投資選擇權的價值。（4）不確定性增加，將提高投資門檻（實質選擇權價值），因此將延緩投資計畫的進行。

（5）若投資計畫價值與成本的相關係數 ρ_{VI} 爲負，表示不確定程度增加，將使投資門檻比例提高，亦即隨著投資計畫價值與成本的相關程度降低時，將增加投資選擇權的價值。

綜言之，本文可以歸納出下面幾點結論：（1）傳統的淨現值法顯然低估投資決策的最適門檻，無法掌握到管理決策的彈性價值，使得廠商發生投資過早的情形。（2）管理決策的彈性價值與產業特性如產品的生命週期、市場需求彈性息息相關，廠商進行投資決策，必須將這些因素納入考慮。（3）當產品生命週期愈短，如某些高科技產業，應儘早投資；而產品的市場獨占力愈弱，則產品的選擇權價值愈低，因此廠商應提前投資。（4）不確定性增加，將提高投資門檻（實質選擇權價值），因此將延緩投資計畫的進行。由此可見，維持國內投資環境之穩定，才能提高廠商投資意願。

References

Abel, A.B., A.K. Dixit, J.C. Eberly, and R.S. Pindyck (1996), Options, the Value of Capital, and Investment. ***Quarterly Journal of Economics*** 111, 753-777.

Bass , F. (1969), A New Product Growth Model for Consumer Durables. ***Management Science***, 15, 215-227.

Bollen ,N. (1999), Real Options and Product Life Cycles. ***Management Science***, 45, 70-84.

Brennan, M.J. and L.Trigeorgis (2000), (eds.) ***Project Flexibility, Agency, and Competition***. Oxford University Press, Oxford.

Caballero , R.(1991), On the Sign of the Investment-Uncertainty Relationship. ***American Economic Review***, 81, 279-288.

Carruth, A., A. Dickerson and A. Henley (2000), What Do We Know About Investment Under Uncertainty? ***Journal Of Economic Surveys***, 14, 119-153.

Dixit, A. K. and R. S. Pindyck (1994), ***Investment under Uncertainty***. Princeton University Press, Princeton ,NJ.

Dodson, B.(1994), ***Weibull Analysis***, ASQC Quality Press, Milwaukee, WI.

Gusio, L. and G. Parigi (1999), Investment and Demand Uncertainty. ***Quarterly Journal of Economics***, 456, 185-227.

Hartman, R. (1972), The Effect of Price and Cost Uncertainty on Investment. ***Journal of Economic Theory***, 5, 258-266.

Hong, B. and E. Sterken (2001), ***Do Firms Wait to Invest ? An Empirical Investigation***. SOM-theme C Coordination and Growth in Economies, Working Paper.

Ingersoll, J. E., and S.A. Ross (1992), Waiting to Invest: Investment and Uncertainty. ***Journal of Business,*** 65 , 1-29.

Kogut, B. and N. Kulatilaka (1994), Operating Flexibility, Global Manufacturing, and the Option Value of a Multinational Network. ***Management Science,*** 40, 123-139.

McDonald, R. and D. Siegel, (1986), The value of waiting to invest. ***Quarterly Journal of Economics*** , 101 ,707-727.

Malliaris, A.G. and W.A. Brock (1982), ***Stochastic Methods in Economics and Finance.*** North-Holland Press, Amsterdam.

Norton, J. and F. Bass (1987), A Diffusion Theory Model of Adoption and Substitution for Successive Generations of Hi-Tech Products. ***Management Science***, 33, 1069- 1086.

Pindyck, R.S. (1988), Irreversibility Investment, Capacity Choice, and the Value of the Firm. ***American Economic Review,*** 78, 969-985.

Pindyck, R.S. (1991), Irreversibility, Uncertainty, and Investment. ***Journal of Economic Literature,*** 29, 1110-1148.

Schwartz, E. and M. Moon (2000), **Rational Pricing of Internet Companies Revisited**. Anderson School at University of California at Los Angles , Working Paper.

Sodal, S. (2001), ***Monopoly with Timing and Scaling Options***. Agder University College, Working Paper.

Triantis, A.J., and J.E. Hodder (1990), Valuing Flexibility as a Complex Option. ***Journal of Finance***, 45, 549-565.

Trigeorgis, L. (1995), (eds.) ***Real Options in Capital Investment :Models, Strategies, and Applications***. Westport, Praeger Press, CT.

Trigeorgis, L. (1996), ***Real Options : Managerial Flexibility and Strategy in Resource Allocation***. MIT Press, Cambridge, MA.

Trigeorgis, L. and S.P. Mason (1987), Valuing Managerial Flexibility. ***Midland Corporate Finance Journal,*** 5, 14-21.

附錄一：收益函數的推導

首先考慮總銷售量Y爲固定常數情況下，由（1）式$Q(t,Y)=f_1(t)Y$

$$dR = Q^{1-\frac{1}{\eta}}d\Phi + \Phi(1-\frac{1}{\eta})Q^{-\frac{1}{\eta}} \cdot \frac{dQ}{dt}dt \tag{A1}$$

兩邊同除以R：

$$\begin{aligned}\frac{dR}{R} &= \frac{d\Phi}{\Phi} + (1-\frac{1}{\eta})\frac{dQ}{Q}dt = \{\alpha + (1-\frac{1}{\eta})\frac{d[f_1(t)Y]}{f_1(t)Y}\}dt + \sigma dz \\ &= \{\alpha + (1-\frac{1}{\eta})\frac{f_1'(t)}{f_1(t)}\}dt + \sigma dz\end{aligned} \tag{A2}$$

若考慮總銷售量Y爲非固定常數情況下，令 $Y=f_2(y)$爲總購買人數的函數，其中，y爲總購買人數。根據定義，$Q(t,Y)=f_1(t)f_2(y)$，帶回（A1）式：

$$\begin{aligned}\frac{dR}{R} &= \frac{d\Phi}{\Phi} + (1-\frac{1}{\eta})\frac{dQ}{Q}dt = \{\alpha + (1-\frac{1}{\eta})\frac{d[f_1(t)f_2(y)]}{f_1(t)f_2(y)}\}dt + \sigma dz \\ &= \{\alpha + (1-\frac{1}{\eta})\frac{f_1'(t)}{f_1(t)}\}dt + \sigma dz\end{aligned} \tag{A2'}$$

比較（A2'）與（A2），結果相同。因此我們採用 Bass（1969）與 Norton and Bass（1987）的假設來設定購買量。

假設未來成長率$\frac{f_1'(t)}{f_1(t)}=\lambda(t)$，其中未來採用的機率密度函數(p.d.f)爲Weibull 分配

$$f_1(t) = \frac{\beta t^{\beta-1}}{\theta^{\beta}}\exp\left[-(\frac{t}{\theta})^{\beta}\right] \tag{A3}$$

$$f_1'(t) = \frac{\beta \cdot t^{\beta-1}\left\{(\beta-1)t^{-1} - \beta t^{\beta-1}(\frac{1}{\theta})^{\beta}\right\}}{\theta^{\beta}}\exp\left[-(\frac{t}{\theta})^{\beta}\right] \tag{A4}$$

$$\therefore \lambda(t) = \frac{f_1'(t)}{f_1(t)} = \frac{(\beta-1)}{t} - (\frac{1}{\theta})^{\beta}\beta t^{\beta-1}$$

再代回（A2），可以得到：

$$\frac{dR}{R}=\left\{\alpha+(1-\frac{1}{\eta})\left[\frac{(\beta-1)-\beta(\frac{t}{\theta})^{\beta}}{t}\right]\right\}dt+\sigma dz \tag{A5}$$

當 $\beta=1$ 時，（A5）可以簡化成：

$$\frac{dR}{R}=\left\{\alpha-(1-\frac{1}{\eta})\left[\frac{1}{\theta}\right]\right\}dt+\sigma dz \tag{A6}$$

附錄二：定理一的證明

由 Malliaris and Brock（1982）定理 7.5 可以得知，利用動態規劃（Dynamic Programming）求出投資計畫的選擇權價值 F(V)，則 Bellman Equation 為：

$$\delta F(V)dt = E(dF) \tag{B1}$$

（B1）式的意義為：在任何時點的區間 dt 投資機會的總預期報酬等於資本上漲的預期報酬率。

利用 Ito's Lemma：

$$dF = F'dV + \frac{1}{2}F''(dV)^2 \text{，其中 } dF/dV = F', d^2F/dV^2 = F'' \tag{B2}$$

將（20）式代入（B2）可得 Bellman Equation：

$$\left[\alpha - \frac{1}{\theta}\left(1-\frac{1}{\eta}\right)\right]VF'dt + \frac{1}{2}V^2[\sigma^2]F''dt - \delta F(V)dt = 0 \tag{B3}$$

另外必須滿足三個邊界條件：

$$\begin{aligned} &F(0)=0 \\ &F(V^*)=V^*-I_0 \\ &F'(V^*)=1 \end{aligned} \tag{B4}$$

第一個條件表示當計畫價值為 0 時，選擇權價值為 0。第二個條件為價值對等條件（value matching condition）表示選擇權價值等於投資的計畫價值。第三個條件為平滑相貼條件（smooth pasting condition）表示選擇權價值與選擇權標的物價值有相同的斜率。

在（B3）式的 Bellman Equation，必須滿足限制式（B4）式，假設解的型態為：

$$F(V) = aV^b \qquad \text{B5)}$$

其中

$$a = (V^*-I)/V^{*b} \text{，} \qquad \text{B6)}$$

$$b=\frac{1}{2}-\frac{\left[\alpha-\frac{1}{\theta}\left(1-\frac{1}{\eta}\right)\right]}{\sigma^2}+\left\{\left[\frac{\left[\alpha-\frac{1}{\theta}\left(1-\frac{1}{\eta}\right)\right]}{\sigma^2}-\frac{1}{2}\right]^2+2\delta/\sigma^2\right\}^{\frac{1}{2}}>1 \text{，} \tag{B7}$$

將（B4）的後兩式代入（B3）式，我們可以得到最適投資時點的門檻值V^*：

$$V^*=\frac{b}{b-1}I_0>I_0 \tag{B8}$$

$$a=(V^*-I_0)/V^{*b}=(b-1)^{b-1}/[(b)^b I_0^{b-1}] \tag{B9}$$

附錄三：定理二的證明

在附錄二假設只有財貨計劃價值爲隨機變數，但是由於要素價格（工資、利率）的外生變動，使得成本函數亦爲一種隨機過程，在此我們依照 McDonald and Siegel（1986）的假設成本函數爲幾何布朗運動

$$dI_t = I_t(\alpha_I dt + \sigma_I dz_I) \tag{C1}$$

收益函數爲：

$$\frac{dR_t}{R_t} = \left\{\alpha + (1-\frac{1}{\eta})\frac{f_1'(t)}{f_1(t)}dt\right\} + \sigma dz = \left\{\alpha + \left(1-\frac{1}{\eta}\right)\lambda(t)\right\}dt + \sigma dz \tag{C2}$$

其中 $f_1(t) = \dfrac{\beta t^{\beta-1}}{\theta^{\beta}}\exp\left[-(\dfrac{t}{\theta})^{\beta}\right]$。

因此

$$R_s = R_t e^{\left(\alpha-\frac{1}{2}\sigma^2\right)(s-t)+\left(1-\frac{1}{\eta}\right)\int_t^s\left[(\beta-1)u^{-1}-\beta\left(\frac{1}{\theta}\right)^{\beta}u^{\beta-1}\right]du+\sigma z_{s-t}}, s \geq t \tag{C3}$$

當 $\beta = 1$，（C3）式可以簡化爲：

$$V_t = R_t\int_t^{\infty} e^{(\alpha-\delta)(s-t)-\left(1-\frac{1}{\eta}\right)\left[(\frac{1}{\theta})(s-t)\right]}ds = \frac{R_t}{\delta-\alpha+\frac{1}{\theta}\left(1-\frac{1}{\eta}\right)} \tag{C4}$$

$$dV_t = \frac{dR_t}{\delta-\alpha+\frac{1}{\theta}\left(1-\frac{1}{\eta}\right)} \tag{C5}$$

$$\frac{dV_t}{V_t} = \frac{dR_t}{R_t} \tag{C6}$$

依照 McDonald and Siegel（1986）模型，假設 $v = k \cdot V$，$\Lambda = k \cdot I$，k 爲任意正數。則我們可以考慮選擇一個邊界 B'，在以下兩條限制式下

$$d\Lambda_t = \Lambda_t(\alpha_I dt + \sigma_I dz_I) \tag{C7}$$

$$dv_t = v_t\left[\delta-\alpha-\frac{1}{\theta}\left(1-\frac{1}{\eta}\right)\right]dt + v_t\sigma dz \tag{C8}$$

以極大化投資的價值 $X(V,I,0)$：

$$X(V,I,0)=\max E_0[(v_{t'}-\Lambda_{t'})e^{-\delta t'}] \tag{C9}$$

在此假設計畫生命爲無窮期，因此邊界與時間無關。

（C9）式的問題爲第一次通過時間的問題（first-passage time problem）。由於 $X(V,I,0)$ 爲一階齊次函數[17]，在此情況下與附錄二的分析相同，最適的投資決策爲當 $V_{t'}/I_{t'}$ 比例到達一個臨界值 X^* 時，投資將會發生。此時報酬的預期現值（C9）式可以改寫爲：

$$E_0[(v_{t'}-\Lambda_{t'})e^{-\delta t'}]=E_0\left\{\Lambda_{t'}\left[B^*-1\right]e^{-\delta t'}\right\}=\left[B^*-1\right]E_0\left\{\Lambda_{t'}e^{-\delta t'}\right\} \tag{C10}$$

利用附錄二的動態規劃，以及由 Malliaris and Brock（1982）定理 7.5 可以得知 $X(V,I,0)$，必須滿足以下的偏微分方程式：

$$\begin{aligned}\delta X=&\frac{1}{2}\left\{X_{vv}V^2\sigma_V^2+X_{II}I^2\sigma_I^2+2X_{VI}VI\sigma_{VI}\right\}\\&+X_V\left[\alpha-\frac{1}{\theta}\left(1-\frac{1}{\eta}\right)\right]V+X_I\alpha_I I\end{aligned} \tag{C11}$$

其中，$\sigma_{VI}=\rho_{VI}\sigma_V\sigma_I$ 爲投資計畫價值與成本的共變數。

（C11）式的解尚須滿足以下的邊界條件：

$$\begin{aligned}&(i)B=V_{t'}/I_{t'}=B^*,X=I\\&(ii)V_{t'}/I_{t'}\to 0,X\to 0\end{aligned} \tag{C12}$$

第一個條件爲價值對等條件表示選擇權價值等於投資的計畫價值。第二個條件表示當計畫價值爲 0 時，選擇權價值爲 0。令（C11）式解的型態爲：

$$X=l\cdot I^m B^n \tag{C13}$$

其中 l 爲常數。

由（C12）式的條件 (i) 可以得知:

$$l=B^{*-n},m=1 \tag{C14}$$

將（C13）（C14）帶入（C11）式：

---

[17] 產品計畫價值函數與利潤函數具有相同的隨機過程，而利潤函數本身具有一階齊次函數的性質。

$$\delta = \frac{1}{2}n(n-1)\omega^2 + n[\alpha_V] + (1-n)\alpha_I \tag{C15}$$

其中 $\omega^2 = \sigma_V^2 + \sigma_I^2 - 2\sigma_{VI}$ ，$\alpha_V = \left[\alpha - \frac{1}{\theta}\left(1 - \frac{1}{\eta}\right)\right]$。

由（C15）的二次式可以求出：

$$n = \frac{1}{2} - \frac{\alpha_V - \alpha_I}{\omega^2} + \left\{\left[\frac{\alpha_V - \alpha_I}{\omega^2} - \frac{1}{2}\right]^2 + 2\frac{(\delta - \alpha_I)}{\omega^2}\right\}^{\frac{1}{2}} > 1 \tag{C16}$$

再利用（C12）的邊界條件求出最適投資時點門檻值 X^*：

$$X^* = (B^* - 1)I^*\left(\frac{\overline{V}/I^*}{B^*}\right)^n \tag{C17}$$

$$B^* = n/(n-1) \tag{C18}$$

其中 I^* 與 $\overline{V}$ 分別為起始的計畫成本與計畫價值，$\omega^2 = \sigma_V^2 + \sigma_I^2 - 2\sigma_{VI}$ ，$\sigma_{VI} = \rho_{VI}\sigma_V\sigma_I$ 為投資計畫價值與成本的共變數。